الحساب وتاريخه

تطور طرائق العد

يمكن تلخيص تطور طرائق العد بأربعة مراحل وكالاتي:

1. في البداية كانت مرحلة وصف المجموعة ككل ، هل كثيرة ، كثيرة جدا أو قليلة ، قليلة جدا ، إذ كانت الفكرة تخمينية .
2. مرحلة الوصف الأدق أي بمعرفة الأغنام مثلا فردا فردا .
3. مرحلة المطابقة بين الشيء ونظيره وهي أكثر دقة مثلا هناك بعض القبائل يحملون أكياسا من الحصى يطابق ما عنده من الخيل .
4. مرحلة التجريد في الحساب وإدراك فكرة العد مجردة ، إذ أن وحدانية الرب ووحدانية الشمس ووحدانية النفس ووحدانية القمر أعطت كلها الرقم واحد ، أي أنها منفردة ، كما أعطيت فكرة الازدواج من العينين والمنخرين والأذنين واليدين والقدمين ، وهكذا بقية الأعداد الثلاثة والأربعة والخمسة و .....

ملاحظة: للمزيد من المعلومات راجع كتاب موجز تاريخ الرياضيات

المجموعات العددية والأساسية :

المجموعة الأساسية للأساس العد a مثلا هي تلك المجموعات التي عناصرها تتكون من 0 ، 1 ، 2 ، ..... ، a-1 . فمثلا المجموعة الأساسية لأساس العد إن كان 2 تتكون من 0 ، 1، والمجموعة الأساسية لأساس العد إن كان 5 تتكون من 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 . إن العدد 60 هو أكبر عدد أساسي معروف ، فقد وجد في النظام الستيني البابلي ، ولا نزال نستعمل هذا النظام عند قياسنا للوقت والزوايا بالدقائق والثواني .

التعبير عن الأعداد بدلالة الأساس :

إن كان أساس العد b فأن أي عدد m يكتب بالشكل التالي :

$$m = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \ldots + a_1 \times b + a_0 \ ,$$

حيث أن :

$$a_r \in \{0,1,2, \ldots ,b-1\} \ , \ r = 0,1,2, \ldots ,n \ .$$

مثال 1:(أ) اكتب العدد 4056 للأساس 7 .

الحل:

الأساس	العدد	الباقي	رتبة الباقي
On 7	4056		
On 7	579	3	0
On 7	82	5	1
On 7	11	5	2
On 7	1	4	3
	0	1	4

$$a_0 = 3 \ , \ a_1 = 5 \ , \ a_2 = 5 \ , \ a_3 = 4 \ , \ a_4 = 1$$

$$4056 = 1 \times 7^4 + 4 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 5 \times 7^1 + 3 \times 7^0 \ .$$

$$\therefore (4056)_{10} = (14553)_7 \ .$$

ملاحظة:

$$(4056)_{10} = 4 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

$$= 4000 + 0 + 50 + 6 = 4056 \ .$$

(ب) اكتب العدد 4056 للأساس 60 .

الحل:

الأساس	العدد	الباقي	رتبة الباقي
On 60	4056		
On 60	67	36	0
On 60	1	7	1
On 60	0	1	2

$a_0 = 36 , a_1 = 7 , a_2 = 1$

$4056 = 1 \times (60)^2 + 7 \times (60)^1 + 36$.

$\therefore (4056)_{10} = (1,7,36)_{60}$.

قد تم وضع فارزة عند كتابة العدد 4056 للأساس 60 وذلك لأن الباقي يزيد عن العشرة .

مثال 2: (أ). أكتب العدد 453 للأساس 5 . (تمرين)

(ب). أكتب العدد 453 للأساس 2 (حيث أن 2 أصغر مجموعة أساسية عند الصينيين).

الحل:

الأساس	العدد	الباقي	رتبة الباقي
On 2	453		
On 2	226	1	0
On 2	113	0	1
On 2	56	1	2
On 2	28	0	3
On 2	14	0	4
On 2	7	0	5
On 2	3	1	6
On 2	1	1	7
On 2	0	1	8

$a_0 = 1 , a_1 = 0 , a_2 = 1 , a_3 = 0 , a_4 = 0, a_5 = 0 , a_6 = 1 , a_7 = 1 , a_8 = 1$

$453 = 1\times 2^8 + 1\times 2^7 + 1\times 2^6 + 0\times 2^5 + 0\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1$.

$\therefore (453)_{10} = (111000101)_2$.

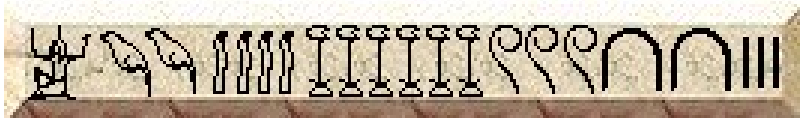
العد عند قدماء المصريين :

يرجع تاريخ استخدام الأعداد المصرية القديمة التي كتبت بالخط الهيروغليفي إلى سنة (3400 ق.م.) وكانت لهم رموز للإعداد 1 ، 10 ، 100 ، 1000 ، 10000 ، 100000 ، 1000000 ، أي أن الأساس العددي عندهم كان عشرة . إن النظام الذي استخدموه في كتابة الأعداد هو نظام التجميع البسيط ويقوم على طريقة تكرار الرمز عددا من المرات لا يزيد على تسعة ، ولم يكن لديهم رمز للصفر، كما أن نظامهم العددي لم يكن يعتمد على فكرة القيمة المكانية (آحاد – عشرات . . . الخ) وفيما يلي الرموز التي كانت تستعمل عندهم .

العدد	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
رمزه							

الجدول(1): الأعداد الهيروغليفية (المصرية القديمة).

لذا فإن العدد العشري 1,246,323 يكتب في النظام الهيروغليفي على النحو الآتي:

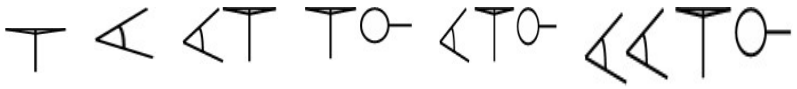


مثال 1: اكتب الرقم 13546 كما كتبه المصريون القدماء باستخدام نظام التجميع البسيط (system of simple grouping) .

العد عند قدماء العراقيين (السومريين والبابليين):

لقد جاء نظام العد السومري خليطا من النظامين العشري والستيني ، إذ أن السومريين بدءوا بالنظام العشري ثم أدركوا بعد فترة قليلة أن الأساس الستيني أصلح لأجراء العمليات الحسابية . كان يكتب عندهم النظام العشري الرموز الآتية :

1	10	11	100	1000	10000	....



الجدول(2): الأعداد في النظام العشري عند السومريين والبابليين

إذ لم يكن هناك سوى علامتين وهما ( ) للواحد والعلامة ( ) للعشرة ، إضافة إلى العلامة ( ) التي استخدمت في حالة واحدة وهي التعبير عن الرقم (100) أو قوى العشرة التي تليها . كما أنهم أدركوا نظام الترقيم الموقعي (local value system) وهو النظام الذي نتبعه الآن ونقصد به نفس الرمز وهو 4 مثلا ، إذا وضع في الآحاد دل على قيمة تختلف عما عليه إذا وضع في العشرات أو المئات فالأعداد 534 ، 543 ، 453 تختلف فيما بينها في القيمة رغم أننا استخدام نفس الرموز فيها وهي 3 ، 4 ، 5 ، غير أن تغيير الموقع هو الذي غير قيمة العدد . كما استخدموا رمزا للطرح وهو ( ) فمثلا :

$19 = 20 - 1 =$

ملاحظة: يكتب الرقم الذي يقل عن (60) حسب نظام التجميع البسيط وبالأساس العشري ، ويكتب الرقم الذي يزيد على (60) حسب النظام الموقعي للترقيم وبالأساس (60) .

مثال 2: اكتب العددين 35 و 319940 كما كتبه العراقيين القدماء .

الحل:

35 =

الأساس	العدد	الباقي	رتبة الباقي
On 60	319940		
On 60	5332	20	0
On 60	88	52	1
On 60	1	28	2
On 60	0	1	3

$a_0 = 20 , a_1 = 52 , a_2 = 28 , a_3 = 1$

$319940 = 1\times(60)^3 + 28\times(60)^2 + 52\times(60)^1 + 20$.

وأخيرا ، إن الرياضيين البابليين كانوا يستعملون الصفر (300 ق.م.) ، حيث وردت في أثارهم علامة B أو الرمز $\sum$ ، وبهذا يكون البابليين لهم السبق في اختراع هذا الرمز المهم والظاهر أنه انتقل بعد ذلك إلى الهنود الذين وضعوا له رمزا خاصا وهو O (دائرة) أو . (نقطة) وسموه sunya أي الفراغ أو الخالي ثم انتقلت الكلمة إلى أوربا إلى كلمة سايفر (cipher) وكلمة زيرو (zero) ، إذ أن الصفر ضروري في نظام الترقيم الموقعي.

العد عند الإغريق (اليوناني):

لقد استفاد الإغريق كثيرا من الحضارات التي سبقتهم كالسومرية والبابلية والمصرية القديمة والهندية، كما استفادوا كثيرا من الفينيقيين الذين استعملوا في الألف الأولى قبل الميلاد الحروف العددية، فتعلم الإغريق من الفينيقيين الكتابة – ولم يكونوا يعرفونها – وأخذوا عنهم حروفهم واستعملوها مدة طويلة في كتابتهم.

وقد اعتمد الإغريق والرومان النظام العشري في العد ، وهم يكتبون أرقامهم من اليسار إلى اليمين، وثمة تقارب بين الأرقام الإغريقية والرومانية، انظر الشكل في أدناه:

العدد	1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000
رمزه	I	⌐	△	⌐Δ	H	⌐H	X	⌐X	M

الجدول(3): نظام الأعداد الإغريقي.

ويلاحظ أن الفئة الخمسية وهي (50 ، 500 ، 5000 ، 50000) جمع فيها على التوالي – بين الخمسة والعشرة، والخمسة والمئة، والخمسة والألف، والخمسة والعشرة آلاف.

لقد استعمل الأيونيون – وهم قَبيلة من الإغريق – حروفهم للتعبير عن الأرقام، وميزوا بين الحرف والرقم بوضع إشارة أعلى الرقم. واستعمل الإغريق (وكذلك العبريون والعرب قديما) حروفهم الهجائية في تمثيل الأعداد. وتوضيحا للنظام الإغريقي نستخدم الحروف α (إلفا)، β (بيتا)، ι (أيوتا)، κ (كبا) حيث تدل على الأعداد: واحد، اثنين..... عشرة، عشرين على الترتيب. وبينما تدل ιβ، على (عشرة واثنان) أي 12 فإنه لم يكن ممكنا تباديلهما كما هو الشأن في الرموز الحالية: إذ نستطيع الآن تبديل رقمي 12 إلى 21 لدلالة على واحد وعشرين. أما عند الإغريق فإن 21 يدل عليهما الرمز κα. وقد ترتب على عدم وصول الإغريق إلى فكرة القيمة المكانية إن استخدموا جميع الحروف الهجائية الأربعة والعشرين

فضلا عن ثلاثة رموز أخرى في كتابة الأعداد الأساسية الأخرى هي: Γ (كاما) للدلالة على خمسة، H (ايتا) للدلالة على 100، X (خى) للدلالة على 1000. ولكتابة أي عدد كانت تتكرر هذه الأرقام باستخدام طريقة التجميع كما فعل المصريون القدماء. وبمرور الوقت توصل اليونانيون إلى طريقة تسمح لهم باختصار الرموز تسمى (بالطريقة الضربية) في كتابة الأرقام: مثلا H تعني خمسمائة . ويُلاحظ أن هذه الطريقة لا تُستعمل إلا للتعبير عن عدد يساوي حاصل ضرب رقم خمسة.

مثال 3: اكتب الرقم 1837 كما كتبه الإغريق .

العد عند الرومان:

استخدم الرومان الأرقام الرومانية التي لا تزال تستخدم في الوقت الحاضر في بعض المجالات، كما استخدموا الترميز كمبدأ الطرح وهو أن نطرح الوحدة الصغرى إذا سبقت وحدة أعلى منها انظر الشكل أدناه :

العدد	1	2	3	4	5	6	7	8	9
رمزه	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX

العدد	10	20	30	40	50	60	70	80	90
رمزه	X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC

العدد	100	200	300	400	500	900	1000	2000
رمزه	C	CC	CCC	CD	D	CM	M	MM

الجدول(4): نظام الأعداد الروماني.

فالعدد 666 يُكتب DCLXVI والعدد 1952 يُكتب MCMLII والعدد 487 يُكتب CDLXXXVII. ويلاحظ أن كتابة هذه الأعداد طويلة وتقود إلى الخطأ، كما أن كتابة عدد كبير باستخدامها سيتكون من عدد ضخم من الرسوم.

مثال : اكتب الرقمين 1824 و 3683 كما كتبه الرومان

$1824 = M\ DCCC\ XX\ IV$

$3683 = MMM\ DC\ LXXX\ III$

مثال : اكتب الرقمين 4281 و 3863 كما كتبه الإغريق و الرومان . (تمرين)

الكسور عند البابليين :

لقد قام البابليون بكتابة الكسور بهيئة أعداد هي أجزاء من الستين فمثلا يمثل عندهم $\frac{1}{3}$ ، $(\frac{20}{60}=\frac{1}{3})$ و يمثل $\frac{1}{2}$ ، $(\frac{30}{60}=\frac{1}{2})$. إضافة إلى استعمالهم إلى 30 والى 30×60 وكذلك $30\times(60)^2$ فهو بصورة عامة يعني $30\times(60)^z$ حيث أن z هو أي عدد صحيح (موجب ، صفر ، سالب).

مثال 1: الرمز هذا يمثل $1\frac{1}{3}$ ، $(1\frac{20}{60}=1\frac{1}{3})$

مثال 2: اكتب $1\frac{9}{16}$ كما كتبه البابليون .

الحل :

$$\frac{9}{16}=\frac{8}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}=\frac{30}{60}+\frac{\frac{15}{4}}{\frac{15}{4}\times 16}=\frac{30}{60}+\frac{\frac{12}{4}+\frac{3}{4}}{60}$$

$$=\frac{30}{60}+\frac{3}{60}+\frac{\frac{3}{4}}{60}=\frac{33}{60}+\frac{60\times\frac{3}{4}}{(60)^2}=\frac{33}{60}+\frac{45}{(60)^2}\ .$$

$$\therefore\ 1\frac{9}{16}=1\ \ \frac{33}{60}+\frac{45}{(60)^2}=1\ ,\ 33\ ,\ 45=$$

ملاحظة : الجدول أدناه يبين الترقيم بالنسبة لكل من الترقيم الهندي والترقيم ألغباري والترقيم العربي وأخيرا الترقيم البرهمي :

هندية										
غبارية										
عربية										
برهمية										

الجدول (5)

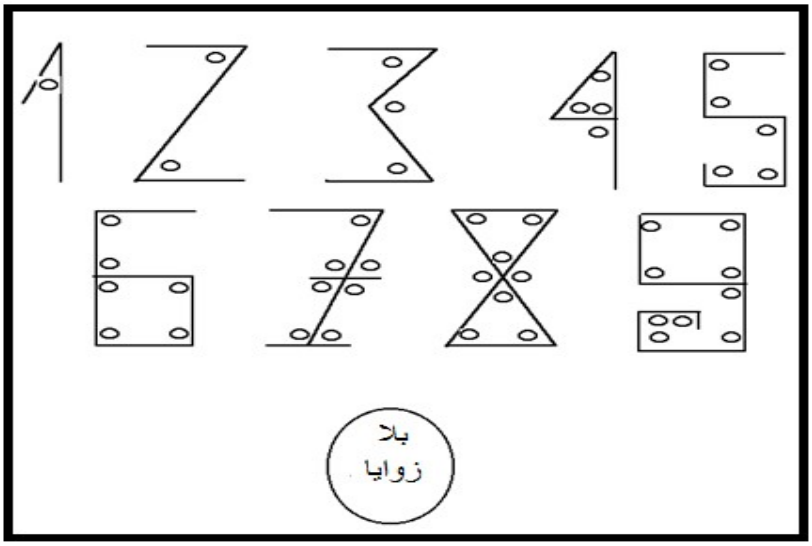
إن اسم الأرقام الغبارية أو الرملية مشتق من العادة الهندية في إجراء الحساب على الأرض أو على لوح مغطى بالرمل .

الأنظمة العددية:

إن العرب كانوا كثيري الترحال والتنقل فكانوا في تلك المرحلة ناقلي البضائع من جهة والحضارة من جهة أخرى. فقد نقلوا الحضارة الهندية إلى المشرق العربي، ثم انتقلت إلى بلدان المغرب العربي والأندلس، ومن هناك انتقلت الحضارة إلى بلاد الغرب.

لقد ظهر الصفر أولا في الهند، إلا أن الهنود لم يفيدوا منه كثيرا ولم يطوروا استخدامه حتى أخذ العرب المسلمون عنهم ذلك وطوروه واختصروا الرموز المختلفة للترقيم التي تدل على الأعداد من 1 إلى 9 ولخصوها بسلسلتين: السلسة الأولى سميت الأرقام الهندية–العربية والمستخدمة حاليا في بلدان المشرق العربي, والسلسة الثانية أطلقوا عليها تسمية الأرقام الغبارية، إذ كانت أكثر تداولاً بين التجار.

لقد ظهرت الأرقام الغبارية في بلدان الغرب العربي وانتقلت من هناك إلى الأندلس ومن ثم إلى أوربا ،وقد أطلق الأوربيون على الأرقام الغبارية تسمية الأرقام العربية. وكما هو معروف فإن الأرقام الغبارية تقوم في أساسها على الزوايا ، كما مبين في الشكل الآتي.



الشكل:الأرقام الغبارية.

إن الأرقام الغبارية، كانت تسمى في المخطوطات القديمة "الأحرف الغبارية"، وللقلصادي كتاب يسمى "**كشف الستار عن حروف علم الغبار**". والغبارية ليست نسبة إلى الغبار كما هو شائع، وغبر بمعنى بقي (كما جاء في شرحه لمنظومة محمد بن غازي العثماني المكناسي (858-919هـ / 1456- 1513م) في "***منية الحساب***"). ومن هذه المنظومة يمكن أن نستنتج تفسيرا لسبب تسمية هذه الأرقام بالغبارية من اثنا عشر اسما للأعداد (واحد – اثنان – ثلاثة – أربعة – خمسة – ستة – سبعة – ثمانية – تسعة – عشرة – مائة – ألف) يتركب ما غبر أي ما بقي من الأسماء: فاسم العدد 203 يتركب من الاسم مائة والاسم ثلاثة، وهذه ميزة تتميز بها الأرقام الغبارية عن حساب الجُمل الذي ليست للأعداد فيه أسماء محددة.