**مبرهنة :** ليكن $W$ فضاء جزئي غير معدوم من $R^n$.
ولتكن $S$ هي $S=\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ قاعدة للفضاء $W$. فيوجد قاعدة عيارية $T=\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ الى $W$.

## التحويلات الخطية :-

**تعريف :-** التحويل $T$ من الفضاء $V$ الى الفضاء $W$ هو تطبيق $T: V \longrightarrow W$ بحيث يحقق

(1) لكل $\vec{u}, \vec{v} \in V$ فان

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

(2) لكل $V \in V$ و $k$ عدد حقيقي فان

$$T(k\vec{v}) = kT(\vec{v})$$

**مثال :-** بين فيما اذا كانت الدالة $T: R^2 \longrightarrow R^3$ المعرفة بالشكل

$$T(x,y) = (y, x+2y, 2x-y)$$

تحويلا "خطيا" أم لا ؟

Scanned by CamScanner

**الحل :-** نأخذ أي متجهين في الفضاء $R^2$ وليكن $\vec{u}, \vec{v}$.

حيث $\vec{u} = (x_1, y_1)$ و $\vec{v} = (x_2, y_2)$ لنختبر هل أن

شروط التحويل الخطي تحقق أم لا ؟

$$u+v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (\underbrace{x_1+x_2}_{x}, \underbrace{y_1+y_2}_{y})$$

$$T(u+v) = (y_1+y_2, x_1+x_2+2y_1+2y_2, 2x_1+2x_2-y_1-y_2)$$

ونأخذ الطرف الأيمن.

$$T(u)+T(v) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$$

$$= (y_1, x_1+2y_1, 2x_1-y_1) + (y_2, x_2+2y_2, 2x_1-y_2)$$

$$= (y_1+y_2, x_1+x_2+2y_1+2y_2, 2x_1+2x_2-y_1-y_2)$$

$$\therefore T(u+v) = T(u) + T(v)$$

**مثال :-** بين فيما اذا كان $T$ تحويلاً خطياً من $R^2$ الى $R^3$

حيث $T: R^2 \longrightarrow R^3$ معرفة بالشكل :-

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y \\ x+y \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

الحل:- لتكن $u, v \in R^2$ حيث

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad , \vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$T(u) = T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ y_1 \\ x_1 + y_1 \end{bmatrix}$$

$$T(v) = T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + 1 \\ y_2 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$T(u) + T(v) = \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ y_1 \\ x_1 + y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 + 1 \\ y_2 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2 \\ y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore T(u) + T(v) \neq T(u+v)$

$\therefore T$ ليس تحويلة خطية

مثال :- H.W.

هل أن التحويل $T$ حيث $T: R^2 \to R^2$ المعرفة بالشكل $T(x,y) = (x, y+1)$ هو تحويل خطي.

Scanned by CamScanner

**تعريف :-** ليكن $T: V \to W$ تحويل معرف بالشكل $T(\vec{v}) = \vec{0}$ لكل $\vec{v} \in V$ هو تحويل خطي يطلق عليه اسم التحويل الصفري .

**تعريف :-** التحويل $T: V \to W$ حيث أن $T(\vec{v}) = \vec{v}$ لكل $\vec{v} \in V$ هو تحويل خطي يطلق عليه اسم التحويل الذاتي .

**تعريف :-** التحويل $T: V \to W$ حيث أن $T(\vec{v}) = k\vec{v}$ لكل $k \in R$ و $V$ هو تحويل خطي يطلق عليه تمدد اذا كان $k > 1$ وانكماش اذا كان $0 < k < 1$

**مثال :-** $T: R^n \to R^m$ معرف بالشكل $T(\vec{x}) = A\vec{x}$

حيث $\vec{x}$ هي مصفوفة سعة $n \times 1$

$A$ هي مصفوفة سعة $m \times n$ أذا حاصل الضرب $A\vec{x}$ مصفوفة سعة $m \times 1$ لكن إثبات أن $T$ هو تحويل خطي نفرض $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ مصفوفتان سعة كل منها $n \times 1$ و $k$ عدد حقيقي فأن

$$\left.\begin{aligned} T(u+v) &= Au + Av \\ A(ku) &= k(Au) \end{aligned}\right\} \text{ من خواص المصفوفات}$$

Scanned by CamScanner