العمليات الحسابية :

لقد ظهرت العمليات الحسابية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) طبيعيا غير مقصود ، وفي أماكن متعددة ، إن العملية (operation) كما تعرف حديثا عبارة عن تطبيق (دالة) من مجموعة مركبة من حاصل ضرب مجموعتين متساويتين إلى المجموعة نفسها فمثلا ، إذا كانت مجموعة الأعداد الطبيعية N فأن العملية (+) هي تطبيق، أي أن $+ : N \times N \to N$ ، وهكذا في بقية العمليات الحسابية .

العمليات الحسابية عند البابليين:

إن ما جاءنا من النصوص والمؤلفات الرياضية البابلية يمكن تصنيفها إلى صنفين :

الصنف الأول : الجداول ، كجداول الضرب وجداول معكوس الأعداد وجداول رفع الأعداد إلى القوى المختلفة وجداول جذور الأعداد .

الصنف الثاني : يشمل قضايا ومسائل وضعت لتحل بموجب القاعدة الرياضية .

إن استعمال البابليون جداول المقلوبات للقسمة يكونون بذلك قد حولوا عملية القسمة إلى الضرب فلإيجاد قيمة الكسر $\frac{a}{b}$ كحاصل ضرب $a \times \frac{1}{b} = a \times b^{-1}$ ، حيث أن b^{-1} معكوس العدد b . ويمكن استخراج قيمة b^{-1} من الجداول ككسر ستيني ، واليك جزء من هذه الجداول :

a	1	2	3	4	5	6	8	9	10	…
a^{-1}	1	30	20	15	12	10	7.30	6.40	6	…

فمثلا :العدد 2 مقلوبه (معكوسه) هو $60 \times \frac{1}{2} = 30$.

العدد 5 مقلوبها (معكوسها) هو $60\times\frac{1}{5}=12$.

العدد 8 مقلوبها (معكوسها) هو $60\times\frac{1}{8}=\frac{15}{2}=\frac{14}{2}+\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}=7.30$.

العدد 50 مقلوبها (معكوسها) هو $60\times\frac{1}{50}=\frac{50}{50}+\frac{10}{50}=1+\frac{1}{5}=1\frac{1}{5}=1.12$.

<u>مثال 1</u>: احسب قيمة $\frac{4}{5}$ كما حسبه البابليون القدماء .

الحل: $\frac{4}{5}=4\times\frac{1}{5}=4\times12=48$ ، حيث أن 48 تمثل من 60 .

<u>مثال 2</u>: اكتب $1\frac{4}{5}$ كما كتبه البابليون القدماء .

الحل: $\frac{4}{5}=4\times\frac{1}{5}=4\times12=48$ ، حيث أن 48 تمثل من 60 .

$\therefore 1\frac{4}{5}=1,48=$

كما وجدت جداول تعطي قيمة x^3-x^2 مما يساعد على حل المعادلة $x^3-x^2=m$ ، حيث أن m معلومة .

n	n^3-n^2
2	4
3	18
4	48
5	100
⋮	⋮

فمثلا حل المعادلة $x^3 - x^2 = 100$ هو $x = 5$ من الجدول .

n	$(2)^n$
1	2
2	4
3	8
4	16
$\vdots$	$\vdots$

r	$(16)^r$
$1/4$	2
$1/2$	4
$3/4$	8
1	16
$\vdots$	$\vdots$

وأخيرا ، فقد وجد في إحدى لوحات لوفر (Louvre) حوالي (300 ق.م.) مسألتين ، أحدهما تشير إلى مجموعة المتوالية الهندسية كالأتي :

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1 \;,$$

والمسألة الأخرى تشير إلى مجموع مربعات الأعداد الطبيعية إلى العشرة كما يأتي :

$$1\times1 + 2\times2 + 3\times3 + \ldots + 10\times10 = 55(1\times\frac{1}{3} + 10\times\frac{2}{3}) = 385 \;.$$

ويلاحظ أن

$$1\times1 + 2\times2 + 3\times3 + \ldots + n\times n = (1 + 2 + \ldots + n)(1\times\frac{1}{3} + n\times\frac{2}{3})$$

$$= (\frac{2n+1}{3})(\frac{n(n+1)}{2}) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \;.$$

من المسألة الثانية نلاحظ أن البابليين اكتشفوا قانون مجموع المربعات لحد العشرة في الأقل ، ثم جاء بعد ذلك بشكل عام (أي إلى n) .

تقريب الجذور التربيعية عند البابليين :

استعمل البابليون طريقة تقريبية في إيجاد الجذر لعدد معين ليس مربعا كاملا وطريقتهم استعملت من قبل الإغريق وهي كما يأتي :

إذا كان $n < \sqrt{m}$ ، والمطلوب إيجاد جذر m ، فأن $\sqrt{m} < \frac{m}{n}$ ومتوسطها أقرب إلى الحقيقة ، وهكذا يمكن تكرار العملية عدة مرات .

مثال 1: $1 < \sqrt{2}$.

الحل:

$m = 2\ ,\ n = 1 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2\ ,$

بأخذ الوسط الحسابي $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ نحصل على

$\frac{m}{n} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}\ ,$

وبأخذ الوسط الحسابي مرة أخرى $\frac{3/2 + 4/3}{2} = \frac{17}{12}$ نحصل على

$\frac{m}{n} = \frac{2}{17/12} = \frac{24}{17} \Rightarrow \frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}\ ,$

وهكذا ... .

مثال 2: أوجد الجذر التربيعي للعدد 17 بطريقة البابليين .

الحل:

$4 < \sqrt{17}$,

تم اختيار 4 باعتبارها كتقريب أولي للجذر التربيعي 17 .

$m = 17\ ,\ n = 4 \Rightarrow 4 < \sqrt{17} < \frac{17}{4}$,

وبأخذ الجذر التربيعي نحصل على

$$\frac{m}{n}=\frac{17}{33/8}=\frac{136}{33} \Rightarrow \frac{136}{33}<\sqrt{17}<\frac{33}{8} \ ,$$

كذلك توجد هناك قاعدة في حالة كتابة العدد m مثلا بالشكل الأتي : $m=a^2+b$ ، فأن ناتج الجذر سوف يكون

$$\sqrt{m}=\sqrt{a^2+b}\cong a+\frac{b}{2a} \ .$$

فمثلا ، في المثال أعلاه نلاحظ ما يأتي :

$$\sqrt{17}=\sqrt{w^2+1}\cong 4+\frac{1}{8}=4.125 \ .$$

عملية الضرب عند المصريين القدماء:

لم يكن لدى المصريين القدماء جداول مطلقا ، فقد كانوا يبدءون بالتضعيف المتتالي للضرب بأي عدد ، فهم يحصلون على ضعف العدد ثم على أربعة أمثاله ثم على ثمانية أمثاله وهكذا...، وبعد ذلك يضيفون الناتج كما يضيفون المضروب :

مثال : جد حاصل ضرب 217 في 13 ، كما كان يستخدمه المصريين القدماء:

الحل:

√	1	217
	2	4056
√	4	579
√	8	82
المجموع	13	2821

الناتج هو 2821 ، وقد حذف الرقم المقابل للعدد 2 لأن 13 = 1+4+8 .

مثال : جد حاصل ضرب 217 في 37 ، بطريقة التضعيف المتتالي :

الحل:

√	1	217
	2	434
√	4	868
	8	1736
	16	3472
√	32	6944
المجموع	37	8029

نلاحظ أن أي عدد صحيح موجب n يمكن كتابته بالشكل الأتي :

$$n = a_0 \times 2^0 + a_1 \times 2^1 + \ ... \ + a_r \times 2^r \ ,$$

حيث أن a إما صفر أو واحد .

عملية القسمة عند المصريين القدماء:

كانت عملية القسمة عند قدماء المصريين أكثر سذاجة وبدائية ، وذلك بطريقة تجريبية ومعاكسة للضرب ألتضعيفي المتتالي السابق .

مثال : جد ناتج قسمة 77 على 7 ، كما وجدت عند المصريين القدماء :

الحل:

√	7	1
√	14	2
	28	4
√	56	8
المجموع	77	11

الناتج هو 11 ، وقد حذف الرقم المقابل للعدد 28 لأن 77 = 7+14+56 .

مثال : جد ناتج قسمة 210 على 7 ، كما وجدت عند المصريين القدماء :

الحل: H.W.

1	7	
2	14	√
4	28	√
8	56	√
16	112	√
30	210	**المجموع**

ملاحظة : نتوقف في حالة الضعف أكبر من الرقم المطلوب إيجاد قسمته :

<u>الكسور عند المصريين القدماء:</u>

استعمل المصريين القدماء كسرين تكميليين هما $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ ، وكان استعمالهم للكسر الثاني نادرا ، أما الكسر الأول (جزءان) بمعنى ثلثين ، فكان استعماله شائعا ، وقد وردت قاعدة الضرب في الآثار المصرية في الكسر $\frac{2}{3}$.

أ . إذا كان المقام عددا زوجيا يضاف إليه نصف المقام ، أي أن :

$$\frac{1}{3n}=\frac{1}{2n}\times\frac{2}{3}\ ,\ n\in Z-\{0\}.$$

ب . إذا كان المقام عددا فرديا يضاف إلى مقامه مرة ويضرب في 6 مرة أخرى، أي أن :

$$\frac{1}{2(2n+1)}+\frac{1}{6(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2n+1}\times\frac{2}{3},\quad n\in Z.$$

ملاحظة : كانت الكسور عند المصريين القدماء ببسوط هي الوحدة الواحدة .

مثال : اكتب الكسور كما كان يكتبه المصريين القدماء نسبة إلى الكسر التكميلي:

1. $\frac{1}{4}$

2. $\frac{1}{5}$

3. $\frac{10}{150}$

<u>مسائل حسابية في بردية رايند المصرية:</u>

لقد وردت العديد من المسال اللطيفة في بردية رايند من نوع التقسيم المناسب وغيرها ، ومن هذه المسائل :

المسألة الرابعة: قسم سبعة أرغفة على عشرة رجال بحيث يأخذ كل رجل $\frac{2}{3}+\frac{1}{30}$.

الحل:

	1	$\frac{2}{3}+\frac{1}{30}$
√	2	$1\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$
	4	$2\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$
√	8	$5\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$
المجموع	10	7

$$\therefore\ (\frac{2}{3}+\frac{1}{30})\times 10 = 7$$

إن طريقة الضرب ألتضعيفي تمكننا من معرفة حصة أي عدد من العشرة رجال من الأرغفة ونلاحظ أن هذه المسألة لا تدل على طلب الحل والناتج بل على تحقيقه.

المسألة الأربعون : تقسيم مئة رغيف على خمسة رجال على خمسة رجال بحيث تكون

الأنصبة الموزعة متوالية حسابية وبحيث يكون سبع مجموع الأنصبة الثلاثة الكبرى مساويا لمجموع النصيبين الأصغرين ، ما هو الفرق بين الأنصبة.

الحل: أولا نجعل الفرق بين الأنصبة $5\frac{1}{2}$ فتكون الكميات التي يأخذها الخمسة هي :

$$1+6\frac{1}{2}+12+17\frac{1}{2}+23=60$$

نلاحظ أن $\frac{15}{2} = \frac{1}{7}(12 + 17\frac{1}{2} + 23) = (1 + 6\frac{1}{2})$.

لتضعيف العدد 60 ليصبح 100 نضاعف هذه الأرقام للوصول إلى المجموعات الحقيقية

1 60

$\frac{2}{3}$ 40

المجموع $1\frac{2}{3}$ مرة 60 تصبح 100 .

$\therefore$ سوف نضرب كل نصيب من الأنصبة الخمسة بـ $1\frac{2}{3}$.

$38\frac{1}{3}$	$23 \times 1\frac{2}{3}$
$29\frac{1}{6}$	$17\frac{1}{2} \times 1\frac{2}{3}$
20	$12 \times 1\frac{2}{3}$
$10\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$	$6\frac{1}{2} \times 1\frac{2}{3}$
$1\frac{2}{3}$	$1 \times 1\frac{2}{3}$
المجموع 60	100

مسألة: كمية وخمسها يضافان معا فيصبحان 34 ، فما هي الكمية ؟

الحل: نفرض الكمية هي 5 ، اذا خمسها يساوي 1 ، اذا المجموع 5 + 1 = 6 .

ولما كان العدد 6 فيجب أن يضعف بنسبة $5\frac{2}{3}$ ليصبح 34، اذا لابد من تضعيف 5 بنسبة $5\frac{2}{3}$. أي أن $5\times 5\frac{2}{3} = 28\frac{1}{3}$.