منظومة المعادلات الخطية — المحاضرة الأولى

عادة تمثل جبرياً معادلة المستقيم في المستوي xy بالصيغة

$$ax + by = c$$

إن معادلة من هذا النوع تسمى معادلة خطية لها متغيرين وهما x و y

المعادلة الخطية :

المعادلة الخطية التي لها n من المتغيرات والتي نعبر عنها بالصيغة

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

حيث أن $a_1, a_2, \dots, a_n$ تنتمي لحقل R.

كيفية حل المعادلة الخطية

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

هذا النظام من المعادلات هو متتابعة من n من الأعداد $S_1, S_2, \dots, S_n$ بحيث أن هذه المعادلة تتحقق عندما نعوض $x_1 = S_1, x_2 = S_2, \dots, x_n = S_n$ مجموعة كل الحلول لهذه المعادلة تسمى مجموعة الحل.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

منظومة المعادلات الخطية (المنظومة الخطية)

هي مجموعة من m من المتغيرات من المعادلات الخطية التي لها n من المتغيرات ويمكن كتابتها بالشكل التالي :-

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1$$
$$a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m$$

حيث أن a_{ij} هي ثوابت وأن المتتابعة $S_1, S_2, \ldots, S_n$ تتكون من n من الاعداد تمثل حل المنظومة واحد $X_1 = S_1$

هذه تمثل حلول للمعادلة الخطية.

المنظومة التوفيقية :- هي تلك المنظومة التي لها حل واحد على الأقل

المنظومة الغير توفيقية :- هي تلك المنظومة التي ليس لها حل

بصورة عامة أن اي منظومة معادلات خطية إما أن تكون لها حل وحيد اذا كان عدد المعادلات بعد التبسيط يساوي عدد المجاهيل . واذا كان للمنظومة الخطية عدد غير منته من الحلول اي اذا كان عدد المعادلات

بعد التبسيط أقل من عدد المجاهيل

يقال لصيغة المعادلات الخطية بأنها صيغة (مدرجة) اذا توفرت فيها الشروط الآتية.

١- المعادلة التي تكون الى الأسفل فيها الأصفار هي الأكثر

٢- المتغير الأول (المجهول) بعد الصفر يكون معادلة

٣- اذا وجدت معادلة عناصرها كلها أصفار فتكتب الى الأسفل

$$X_1 + 3X_2 - X_3 = b_1$$

$$0 + X_2 + 2X_3 = b_2$$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

يقال لمنظومة المعادلات بأنها (مكافئة) لمنظومة أخرى اذا نتجت من احدى العمليات التالية:-

١- ابدال معادلتين مع بعضهما

٢- ضرب طرفي المعادلة بثابت

٣- ضرب طرفي المعادلة بثابت واضافتها الى معادلة أخرى

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (1) حل منظومة المعادلات

$L_1: x + 2y - 3z = 6$

$L_2: 2x - y + 4z = 2 \qquad (-2L_1 + L_2)$

$L_3: 4x + 3y - 2z = 14 \qquad (-4L_1 + L_3)$

الحل :-

$L_1: x + 2y - 3z = 6$
$L_2: 0 - 5y + 10z = -10$
$L_3: 0 - 5y + 10z = -10$

$L_1: x + 2y - 3z = 6$
$L_2: -5y + 10z = -10$

∴ يوجد عدد غير منتهي من الحلول وذلك للتطابق المعادلتين الاخيرتين

∴ عدد المعادلات أقل عدد المجاهيل (x, y, z) ⟸ حل معتمد.

$L_1: x + 2y - 3z = 6$
$L_2: y - 2z = 2 \qquad L_2 / -5$

$y = 2z + 2 \Rightarrow$ Let $z = t$, $y = 2t + 2$

$x = 6 - 2(2 + 2t) + 3t \Rightarrow x = 2 - 4t + 3t = 2 - t$

∴ $\xi = \{2 - t, 2 + 2t, t\}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تعريف :-

يقال لمنظومة المعادلات الخطية التي لها n من المجاهيل والتي حدودها الخالية من المجاهيل هي أصفار بأنها منظومة متجانسة

وصيغتها على النحو التالي :-

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = 0$$
$$a_2X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = 0$$
$$a_{m_1}X_1 + a_{m_2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = 0$$

مثال (2) حل منظومة المعادلات التالية :-

$$L_1 : 5x + 2y - 7z = 0$$
$$L_2 : x - 2y + z = 0 \qquad (-5L_2 + L_1)$$
$$L_3 : 3x - 4y - 7z = 0 \qquad (-3L_2 + L_3)$$

الحل :-

$$L_1 : 5x + 2y - 7z = 0$$
$$L_2 : 0 + 12y - 12z = 0 \qquad L_2/12$$
$$L_3 : 0 + 2y - 10z = 0 \qquad L_3/2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$L_1 : x - 2y + z = 0$

$L_2 : y - z = 0 \qquad (-L_2)$

$L_3 : y - 5z = 0$

$L_1 : x - 2y + z = 0$
$L_2 : -y + z = 0$
$L_3 : -y - 5z = 0$

$\Rightarrow -4z = 0 \Rightarrow z = 0, y = 0, x = 0$

$\therefore$ ع = $(0,0,0)$

مثال (٣) : جد قيمة a, b, c بحيث أن $(1,1,1)$ هو حل للنظام الخطي الآتي :

$$ax_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$
$$3x_1 + bx_2 - 5x_3 = 0$$
$$5x_1 - 4x_2 + cx_3 = 7$$

وأثبت $(0,1,1)$ ليس لها حلاً لهذه المنظومة.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل :-

$L_1 : a(1) + 2(1) + 3(1) = 6$

$a + 2 + 3 = 6 \Longrightarrow \boxed{a = 1}$

$L_2 : 3(1) + b(1) - 5(1) = 0$

$3 + b - 5 = 0 \Longrightarrow \boxed{b = 2}$

$L_3 : 5(1) - 4(1) + C(1) = 7$

$5 - 4 + C = 7 \Rightarrow \boxed{C = 6}$

نعوض عن قيم x بـ $(0, 1, 1)$ في المعادلات

$1(0) + 2(1) + 3(1) = 6$

$\Longrightarrow 0 + 2 + 3 \Rightarrow 5 \neq 6$ تناقض

∴ النقطة $(0, 1, 1)$ ليست لها حلاً للمنظومة.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (4): حل منظومة المعادلات الآتية من أجل أن تكون هذه المنظومة قوية. وأثبت أن $c=a+b$

(لها حل واحد على الأقل)

الحل :-

$$L_1: x+y+2z=a$$
$$L_2: x+z=b$$
$$L_3: 2x+y+3z=c$$

$-L_1+L_2$

$-2L_1+L_3$

$$-x-y-2z=-a$$
$$x+z=b$$

$$-y-z=b-a \quad \ldots\ldots (1)$$

$$-2x-2y-4z=-2a$$
$$2x+y+3z=c$$

$$-y-z=c-2a \quad \ldots (2)$$

من المعادلة (1) و (2) نحصل على :-

$$b-a=c-2a \Rightarrow b-a-c+2a=0$$
$$b-c+a=0$$
$$\Rightarrow \boxed{c=b+a}$$ و.ه.م

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (٥) :- حل المعادلات الخطية الآتية

H.w.

$L_1 : 2x + y - 3z = 5$

$L_2 : 3x - 2y + 2z = 5$ $\quad (-3L_1 + 2L_2)$

$L_3 : 5x - 3y - z = 16$ $\quad (-5L_1 + 2L_3)$

الحل :-

$$-6x + 3y + 9z = -15$$
$$6x - 4y + 4z = 10$$

$$\Rightarrow -7y + 13z = -5 \quad \dots (1)$$

$$-10x - 5y + 15z = -25$$
$$10x - 6y - 2z = 32$$

$$\Rightarrow -11y + 13z = 7 \quad \dots (2)$$

نضرب المعادلة (1) في (-1)
ونجمعها مع المعادلة (2)

$$+7y - 13z = 5$$
$$-11y + 13z = 7$$

$$-4y = 12 \Rightarrow \boxed{y = -3}$$

$$-7(-3) + 13z = -5 \Rightarrow \boxed{z = -2}$$

$$2x - 3 - 3(-2) = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$\therefore$ ع $= \{1, -3, -2\}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner