الحساب عند الإغريق :

إن الصورة الأولى للرياضيات عند الإغريق تدعو إلى الدهشة من حقيقتين متكاملتين (أو متناقضتين بكلمة أخرى) هما : إهمال الحساب البسيط والعمل النادر في التفكير الرياضي . إذ أنهم لم يعتنوا بالعمليات الحسابية العادية في حين كانت آراؤهم الهندسية التي تعتمد إلى حد كبير على خصائص الأعداد وهذا ما جعل العمليات الحسابية عندهم معقدة.

اتجه الإغريق بالحساب اتجاها تجريديا فقد عرفوا الوحدة وعرفوا العدد كمجموع وحدات (الفيلسوف اليوناني طاليس) . واعتبر الفيثاغوريون أن العدد يبدأ بالواحد (الوحدة) وبتجميع الوحدات بعضها إلى بعض وحدة وحدة تزيد الأعداد ، كما أن التناقص ينتهي بالوحدة مرة ثانية. ثم عرفوا الأعداد التامة (perfect numbers) وهي الأعداد التي تساوي مجموع قواسيمها مثلا (1+ 2+ 3 = 6) و (1+ 2+ 4+ 7+ 14 = 28) . أما الأعداد الزائدة (over perfect numbers) وهي الأعداد التي مجموع قواسيمها تزيد عنها مثلا (1+ 2+ 3+ 4+ 6 > 12). وأما الأعداد الناقصة (defective numbers) هي الأعداد التي مجموع قواسيمها تنقص عنها مثلا (1+ 2+ 4 < 8) .

تعريف الأعداد المتحابة : يقال للعددين a و b أنهما متحابان إذا كان a يساوي مجموع قواسم b و b يساوي مجموع قواسم a مثلا العددان 220 و 284 .

وأخيرا فقد أعطى الإغريق القاعدة الآتية للأعداد التامة موضحة في الجدول أدناه :

n	2^{n-1}	2^n-1	العدد التام
2	2	3	6
3	4	7	28
5	16	31	496
7	64	127	8128

مثال1 : ما هي قواسم الأعداد الآتية 100 ، 496 ، 64 ، وما نوع كل منها ؟

الحل:

مجموع قواسم العدد 100 هي $117 = 50 + 25 + 20 + 10 + 5 + 4 + 2 + 1$.

إذا العدد 100 عدد فوق التام .

مجموع قواسم العدد 496 هي $496 = 248 + 124 + 62 + 31 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$.

إذا العدد 496 عدد تام .

مجموع قواسم العدد 64 هي $63 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$.

إذا العدد 64 هو عدد دون التام .

مثال2 : برهن أن صيغة العدد التام هي $(1 - 2^n) \times 2^{n-1}$ ، **حيث أن** $n > 1$.

الحل :

إن عوامل العدد $(1 - 2^n) \times 2^{n-1}$ تتكون من مجموعتين ، أي أن قواسم m تشكل مجموعتين :

المجموعة الأولى :

$$\text{set}_1 = \{1, 2, 2^2, \ \ldots. \ , 2^{n-1}\}$$

وهي متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها 2 .

المجموعة الثانية :

$$\begin{aligned}\text{set}_2 &= \{(2^n - 1), 2(2^n - 1), 2^2(2^n - 1), \ \ldots. \ , 2^{n-2}(2^n - 1)\} \\ &= (2^n - 1)\{1, 2, 2^2, \ \ldots. \ , 2^{n-1}\}\end{aligned}$$

$$\text{Sum}(\text{set}_1) = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$$

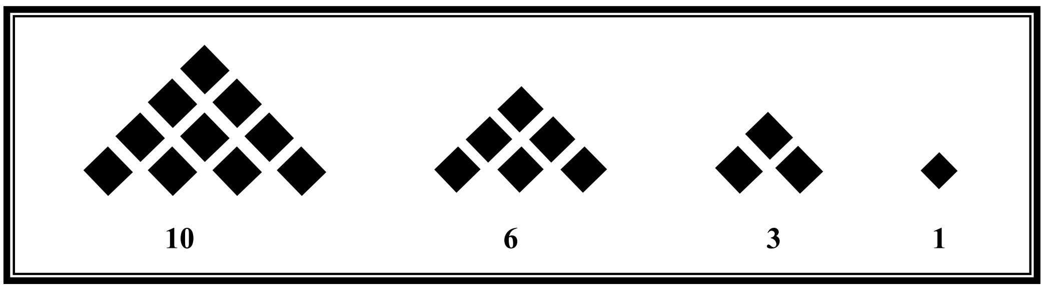
$$\text{Sum}(\text{set}_2) = \frac{(2^n - 1)(1 - 2^{n-1})}{1 - 2} = (2^n - 1)(2^{n-1} - 1)$$

إذا مجموع قواسم العدد m هي

$$(2^n - 1) + (2^n - 1)(2^{n-1} - 1) = (2^n - 1) + (1 + 2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

الأعداد المصورة عند الفيثاغوريين :

قام الفيثاغوريين بتمثيل الأعداد كصور مثلا النقطة تمثل واحد ، والنقطتان تمثلان اثنان وكذلك المستقيم الواصل بينهما ، ثلاثة نقاط تمثل ثلاثة وكذلك تمثل المستوي المحاط بثلاث مستقيمات ، أما أربع نقاط أحدهم خارج مستوي النقاط الثلاثة الأخرى فتمثل الرقم أربعة وكذلك أول مجسم محاط بخطوط . إن فيثاغورس اكتشف أن مجموع أي عدد من الحدود المتتالية من متسلسلة الأعداد الطبيعية 1 ،2 ،3، ..... ابتداءا بالواحد يشكل عددا مثلثيا كما موضح أدناه:



لهذا فأن $1+2+3+\ ...\ +n=\frac{1}{2}n(n+1)$ هو عدد مثلثي بضلع n .

الأعداد الفيثاغورية :

وضع فيثاغورس صيغة للأعداد سميت فيما بعد باسمه (الأعداد الفيثاغورية) وهي الأعداد التي تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه أعداد صحيحة والصيغة التي وضعها فيثاغورس هي : فإذا كان m أي عدد فردي فأن $m^2+\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$

وهناك صيغة أخرى إلى أفلاطون وهي $(2m)^2+(m^2-1)^2=(m^2+1)^2$، إذ يمكن بسهولة ملاحظة أن صيغة أفلاطون هي نفس صيغة فيثاغورس بعد ضرب الطرفين في 2^2 ، وكلا من الصيغتين تعطي متطابقة .

m	$\frac{m^2-1}{2}$	$\frac{m^2+1}{2}$
3	4	5
5	12	3
7	24	25
9	40	41
11	60	61

نلاحظ أن الوتر دائما اكبر من الضلع الأكبر بواحد (دائما صحيحة) .

مثال1 : بين أنه مجموع أي عددين مثلثين متتاليين يظهر لدينا مربع .

الحل :

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Delta_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\Delta_n + \Delta_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(2n+2)}{2} = (n+1)^2 \ .$$

مثال2 : بين أنه مجموع الأعداد الفردية المتتالية يظهر لدينا مربع .

الحل :

$$1+3+5+\ldots\ +(2h-1).$$

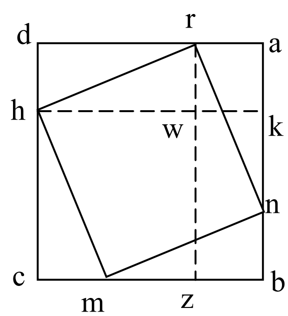
متتالية حسابية حدها الأول 1 وأساسها 2 وحدها الأخير 2h-1 .

$$\sum_{i=1}^{h}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{h} i - \sum_{i=1}^{h} 1 = 2\ \frac{h(h+1)}{2} - h = h^2 + h - h\ .$$

مثال 3: بين من صيغة فيثاغورس أن الوتر يزيد على الضلع القائم بواحد.(واجب)

نظرية فيثاغورس : مربع الوتر يساوي مجموع مربع الضلعين القائمين.

البرهان: أخذ العالم فيثاغورس مربعين مختلفين ووضع الصغير منهما داخل الكبير ورؤوس الصغير على أضلاع الكبير كالمربعين(a b c d) ، (r n m h) فتكون



مساحة المربع (a b c d) = مساحة المربع(r n m h) + مساحة أربع المثلثات (a n r) ، (n b m) ، (m c h) ، (c d r)

مساحة المربعين (a k w r) ، (w z c h) +مساحة المستطيلين (r w h d)، (k b z w) = مساحة المربع (r n m h) + مساحة أربع المثلثات (a n r) ، (n b m) ، (m c h) ، (h d r)

بما أن مساحة المستطيلين (r w h d)، (k b z w) = مساحة أربع المثلثات (a n r) ، (n b m) ، (m c h) ، (h d r)

وبما أن مساحة المربع(r n m h)= مساحة المربع (a k w r) + مساحة المربع (w z c h).

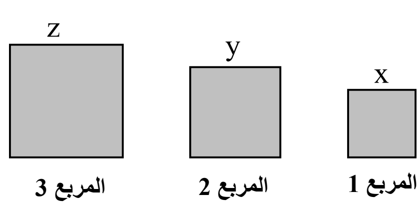
أذا مربع الضلع (r h) = مربع الضلع (r w) + مربع الضلع (w h).

و هو المطلوب.

التحقق من نظرية فيثاغورس

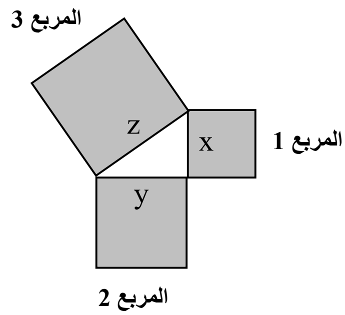
أبسط طريقة للتحقق من ***نظرية فيثاغورس*** (مربع الوتر لمثلث قائم الزاوية يساوي مجموع مربع الضلعين الآخرين) هي:

نأخذ ثلاث مربعات بحيث أطول الأضلاع في كل مربع هي x و y و z على التوالي ، كما موضح في الشكل 1:



الشكل 1

بعد ذلك نقوم بترتيب المربعات الثلاثة بحيث يشكل بينهم مثلث قائم الزاوية كما موضح في الشكل 2:



الشكل 2

فإذا قمنا بحساب مساحة كل مربع من المربعات الثلاثة لوجدنا أن قيمة مربع الوتر (**مساحة المربع 3)** يساوي مجموع قيمتي مربع الضلعين الآخرين (**مساحة المربع 1 + مساحة المربع 2)**. أي أن

$$x^2 + y^2 = z^2 .$$

وبذلك نكون قد تحققنا من نظرية فيثاغورس بالاعتماد على مساحة المربع.

الأعداد غير القياسية (اللانسبية):

وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها بصيغة نسبية $\{\frac{a}{b} , a , b \in Z , b \neq 0\}$. مثل $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، ... .

مثال 1 : برهن أن $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي .

الحل: نفرض أن $\sqrt{2}$ هو عدد نسبي ، أي أن $\sqrt{2} = \frac{a}{b} , a , b \in Z , b \neq 0$ ، حيث أنه لا يوجد قاسم مشترك بين a و b (أي أن القاسم المشترك الأعظم بينهما هو الواحد).

إذا $a^2 = 2b^2$ ، وبذلك يكون a^2 عدد زوجي وهذا يودي إلى أن a عدد زوجي أيضا وبالتام فأن b عدد فردي .

بما أن a عدد زوجي ، نفرض أن $a = 2m$ حيث أن $m \in Z$ نعوض هذا في $a^2 = 2b^2$ نحصل على $4m^2 = 2b^2$ وهذا يودي إلى أن $2m^2 = b^2$.

إذا b^2 هو عدد زوجي وهذا يودي إلى أن b هو عدد زوجي وهذا تناقض (لأن لا يمكن أن يكون هناك عدد زوجي وفردي في آن واحد) .

إذا لا يوجد عددان صحيحان مثل a و b بحيث $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. إذا $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي .

الحساب عند العرب :

1. طور العرب الترقيم ونقلوا الأرقام الهندية – العربية إلى العالم كما أضافوا الصفر وكانوا أول من استعمل الصفر مع الترقيم العشري ألموقعي.

2. اخترعوا الكسور العشرية فقد حسب العالم غياث الدين الكاشي النسبة الثابتة ط(π) (بين محيط الدائرة وقطرها) صحيحة لستة عشر رقما عشريا $2\pi = 6,283185071795865$ ، اذ لم يسبق احد الى ايجاد هذه النسبة بهذه الدقة ومن هذا تبين أن $\pi = 3,141592359879325$ ، وكذلك أوجد الكاشي في كتابه (مفتاح الحساب) إضافة إلى الكسور العشرية قانون لإيجاد مجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة للقوى الرابعة .

$$\sum i^4 = \left[\frac{1}{5}(\sum i - 1)) + \sum i\right]\sum i^2 .$$

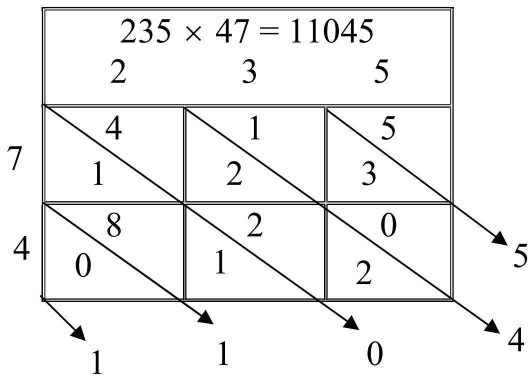
ملاحظة:

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

3. طوروا العمليات الحسابية ففي الجمع أوجدوا سطرا خاصا للمحفوظات ، وفي الضرب بالعدد 25 كانوا يأخذون ربع العدد بعد ضربه بمائة وكذلك استعملوا طرق عديدة ومختلفة في الضرب.

مثال 1:

جمع الأعداد	
3772 54876 3405	
1211	المحفوظات
62053	المجموع



4. لقد عرف أبو بكر الكرخي الجذر ألتربيعي بأنه ذلك العدد الذي نسبة الواحد إليه كنسبة إلى المطلوب جذره. أي أنه إذا كان $\sqrt{m} = a$ فأن $\frac{1}{a} = \frac{a}{\sqrt{m}}$. ويشير إلى أنه منطق (نسبي) مثل جذر 4 أو غير منطق (غير نسبي) مثل جذر 130 ، وبذكر شرطين لا بد من توفرهما في كل مربع :

أولا : رقم الآحاد يجب أن يكون أحد الأرقام الآتية : 0 ، 1 ، 4 ، 5 ، 6 ، 9 . فالعدد الذي آحاده 3 أو 7 لا يمكن أن يكون مربعا كاملا .

ثانيا : بعد طرح التسعة أو مضاعفاتها من مجموع أرقام العدد يجب أن يكون الناتج أحد الأرقام 0 ، 1 ، 4 ، 71 .

الجذر التربيعي بقانون الكرخي :

أعطى الكرخي القاعدة العامة لإيجاد الجذور للجذور غير النسبية (الجذور الصماء) مثل $\sqrt{40}$ وهي $\sqrt{m^2+a}=m+\dfrac{a}{2m+1}$.

مثال : جد $\sqrt{130}$ باستخدام قاعدة الكرخي :

الحل:

$$\sqrt{130}=\sqrt{121+9}=\sqrt{11^2+9}=11+\frac{9}{22+1}=11\frac{9}{23}.$$

مثال : جد كلا من $\sqrt{40}$ و $\sqrt{70}$ باستخدام قاعدة الكرخي : واجب

أما إيجاد الجذور التربيعية للأعداد النسبية (لا يوجد باقي) بطريقة الكرخي نلاحظ الأمثلة الآتية :

مثال: جد كلا من $\sqrt{144}$ و $\sqrt{256}$ باستخدام قاعدة الكرخي:

الحل:

12	
$1^2=1$	144
$2\times1=2$	1
$2\times22=44$	044
	44
00	

16	
$1^2=1$	256
$2\times1=2$	1
$6\times26=156$	156
	156
000	

$\therefore\ \sqrt{144}=12$

$\therefore\ \sqrt{256}=16$

مثال: جد كلا من $\sqrt{169}$ و $\sqrt{225}$ و $\sqrt{289}$ باستخدام قاعدة الكرخي:واجب

مثال: جد كلا من $\sqrt{17424}$ و $\sqrt{65536}$ باستخدام قاعدة الكرخي:

الحل:

132	
$1^2=1$ $2\times1=2$	17424 1
$3\times23=69$	07424 69
$2\times13=26$ $2\times262=524$	524 524
	000

256	
$2^2=4$ $2\times2=4$	65536 4
$5\times45=225$	255 225
$2\times25=50$ $6\times506=3036$	3036 3036
	0000

$\therefore\ \sqrt{17424}=132$.

$\therefore\ \sqrt{65536}=256$.

<u>الجذر التربيعي بقانون القلصادي :</u>

أعطى القلصادي (أبو الحسن علي بن محمد البسطي) قيمة تقريبية للجذر التربيعي بالقانون الأتي : $\sqrt{m^2+a}\approx m+\dfrac{2ma}{4m^2+a}$.

ويرى بعض الرياضيين أن هذا التقريب إبان طريقة لبيان الجذور الصماء بكسور مسلسلة حيث أن الناتج يكون $m+\dfrac{a}{2m+\dfrac{a}{2m}}$.

مثال :جد كلا من $\sqrt{17}$و $\sqrt{38}$ بطريقة القلصادي

الحل:

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{4^2+1} \approx 4 + \frac{2\times 4\times 1}{4\times 4^2+1} = 4\frac{8}{65} = 4{,}123 \text{ .}$$

$$\sqrt{38} = \sqrt{36+2} = \sqrt{6^2+2} \approx 6 + \frac{2\times 6\times 2}{4\times 6^2+2} = 6\frac{12}{73} = 6{,}164 \text{ .}$$

<u>ملاحظة</u> : بصورة عامة

$$\sqrt[n]{m^n + a} \approx m + \frac{a}{(m+1)^n - m^n} \text{ .}$$

مثال :جد كلا من $\sqrt[4]{18}$ بطريقة القلصادي

الحل:

$$\sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{16+2} = \sqrt[4]{2^4+2} \approx 2 + \frac{2}{(1+2)^4 - 2^4} = 2\frac{2}{65} = 2{,}030 \text{.}$$

مثال : كمية وسبعها يضافان معا فيصبحان 19 ، فما هي الكمية . (واجب)

مثال : اثبت صحت كلا مما يأتي: (واجب)

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.