المحاضرة الثانية

المصفوفات :-

هي ترتيب مستطيل يتكون من عناصر حسابية

{ أعداد ، متغيرات ، دوال } . وتسمى عناصر المصفوفة ،

وعادة " تحاط بقوسين .

إن المصفوفة A والتي لها m من الصفوف و n من الاعمدة

تكتب بالترتيب المستطيل التالي :-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

العنصر العام لهذه المصفوفة هو $A = a_{ij}$ وهو الذي

يقع في الصف رقم i والعمود رقم j حيث أن :-

$$i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

وتكتب بأختصار $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال:-

$$A=\begin{bmatrix}2&3&1\\4&6&2\\4&4&5\end{bmatrix}_{3\times3}$$

سعة هذه المصفوفة هي

$$B=\begin{bmatrix}2&7&8\\4&3&2\end{bmatrix}_{2\times3}$$

سعة هذه المصفوفة هي

$$C=\begin{bmatrix}2&4\\5&3\end{bmatrix}_{2\times2}$$

سعة هذه المصفوفة هي

$$D=\begin{bmatrix}1\\-6\\3\end{bmatrix}_{3\times1}$$

سعة هذه المصفوفة هي

إن اي نظام أو مجموعة المعادلات الخطية يمكن وضعها في صورة مصفوفة

مثال:-

$$\begin{aligned}-3x+4y+6z&=10\\3x-2y+z&=7\\x-z&=-1\end{aligned}\iff\begin{bmatrix}-3&4&6\\3&-2&1\\1&0&-1\end{bmatrix}_{3\times3}$$

منظومة معادلات — مصفوفة معاملات

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

))-

يمكن وضع معاملات المتغيرات والتي هي (x,y,z) الطرف الأيسر ووضعها في صورة مصفوفة وتسمى مصفوفة المعاملات كذلك يمكن تكوين ما يسمى بالمصفوفة الموسعة عند وضع الثوابت الموجودة في الطرف الايمن لمنظومة المعادلات الخطية ووضعها جنباً الى جنب مع المعاملات التي في مصفوفة المعاملات اي أن :-

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -3 & 4 & 6 & 10 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]_{3\times 3}$$

المصفوفة الموسعة

العمليات على المصفوفات :-

١) جمع المصفوفات & طرح المصفوفات

ليكن $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$

يعرف حاصل جمع المصفوفات بالشكل

$$C = A+B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}$$

$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

مثال :- لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

أوجد $A+B$ و $A-B$

الحل :-

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+(-1) & 5+2 \\ -1+3 & 0+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-(-1) & 5-2 \\ -1-3 & 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظة :-

الشرط الضروري والكافي لجمع وطرح اي مصفوفتين هو أن تكون السعات متساوية فيما بينها ولا يمكن جمع اي مصفوفتين او طرحهما اذا كانت السعات غير متساوية.

٢ ضرب مصفوفة بعدد (ثابت)

اذا كانت المصفوفة $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و k هو عدد ثابت

فأن $k.A=[k.a_{ij}]_{m\times n}$

k يضرب بكل عنصر من عناصر المصفوفة.

مثال :-

لتكن $k=2$, $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$

فأوجد kA

الحل :-

$$k.A=2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣- ضرب المصفوفات

المحاضرة الثالثة

اذا كانت $A=[a_{ij}]$ ، $B=[b_{ij}]$

فان حاصل ضرب AXB هو المصفوفة المعرفة بالشكل

$$C=A.B=[a_{ij}]_{m\times n}\cdot[b_{ij}]_{n\times q}$$

$$[c_{ij}]_{m\times q}=\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times q}$$

ملاحظة:-

الشرط الضروري والكافي لضرب اي مصفوفتين هو أن تكون عدد الاعمدة في المصفوفة الاولى تساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية

اي أن:- اعمدة المصفوفة الاولى = صفوف المصفوفة الثانية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وعملية الضرب تكون كالآتي :-

نأخذ الصف الاول من المصفوفة A والعمود الاول من المصفوفة B ونوجد حاصل ضرب عناصر الصف الاول من A والعمود الأول من B فيكون المجموع هو أول عنصر في الصف الاول من المصفوفة AxB اي هو C

مثال :-

جد A.B وجد B.A إن أمكن

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}_{2\times3},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}_{3\times2}$$

الحل :-

$$A.B=\begin{bmatrix}2 & 5 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$=\begin{bmatrix}2(2)+5(1)+(-1)3 & 2(3)+5(5)+6(-1)\\ 3(2)+2(1)+1(3) & 3(3)+2(5)+1(6)\end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & 25\\ 11 & 25\end{bmatrix}_{2\times2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$B.A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3×2 $\quad$ 2×3

$$B.A = \begin{bmatrix} 2(2)+3(3) & 2(5)+2(3) & 2(-1)+3(1) \\ 1(2)+5(3) & 1(5)+5(2) & 1(-1)+5(1) \\ 3(2)+6(3) & 3(5)+6(2) & 3(-1)+6(1) \end{bmatrix}$$

$$\therefore B.A = \begin{bmatrix} 13 & 16 & 1 \\ 17 & 15 & 4 \\ 24 & 27 & 3 \end{bmatrix}$$

3×3

ملاحظة :- $A.B \neq B.A$ هذا يدل على أن عملية الضرب للمصفوفات عملية غير ابدالية أحيانا.

لإيجاد سعة حاصل ضرب المصفوفة $A.B$

أ) سعة A 2×3
سعة B 3×4

فأن سعة

$A.B = (2\times 3).(3\times 4)$
$= 2\times 4$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢- A سعة 1×2
B سعة 3×1

$A.B = (1\times 2).(3\times 1) \Rightarrow 2 \neq 3$ فأن سعة

∴ لا يمكن الضرب لأن عدد الاعمدة في المصفوفة الاولى A لا تساوي عدد الصفوف في المصفوفة B.

٣- A سعة 5×2
B سعة 2×3

$A.B = (5\times 2).(2\times 3)$ فأن سعة

$= (5\times 3)$

مبرهنة :- اذا كانت سعات المصفوفات A, B, C تحقق العمليات فأن الخواص الآتية على المصفوفات صحيحة.

١- قانون التجميع الجمعي :-

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

٢- قانون التوزيع العددي :-

$$k.(A+B)=k.A+k.B$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣- قانون الابدال الجمعي :-

$$A + B = B + A$$

٤- قانون التجميع الضربي :-

$$A.(B.C) = A.(B.C) = (A.B).C$$

٥- قانون التوزيع :-

$$A.(B+C) = A.B + A.C$$

مثال :- لتكن $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$\hookrightarrow$ $A.(B+C) = A.B + A.C$

الحل :- نوجد أولاً

$$B + C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$A.(B+C)=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 2 & 5\\ 7 & 6 & 4\end{bmatrix}$$ ثم نوجد

$$=\begin{bmatrix}28 & 26 & 21\\ -7 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

و الآن نوجد

$$A.B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}18 & 19 & 13\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$A.C=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 7 & 8\\ -7 & -4 & 7\end{bmatrix}$$

$$\therefore (A.B)+(A.C)=\begin{bmatrix}18 & 19 & 13\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10 & 7 & 8\\ -7 & -4 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}28 & 26 & 21\\ -7 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

وعليه فأن $A.(B+C)=A.B+A.C$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner