المصفوفات الخاصة :-

المحاضرة الرابعة

١- مصفوفة الصف :-

تسمى المصفوفة ذات الصف الواحد بمصفوفة الصف وتكون دائماً ذات رتبة أو سعة (1xn)

مثال :- $A = [1 \ 2 \ 0 \ 4 \ 5]_{1X5}$

٢- مصفوفة العمود :-

تسمى المصفوفة التي تحتوي على عمود واحد بمصفوفة العمود وتكون دائماً ذات رتبة أو سعة (mx1)

مثال :- $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}_{3X1}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4X1}$

٣- المصفوفة المربعة :-

هي المصفوفة التي عدد صفوفها تساوي عدد اعمدتها. وتكون من الرتبة (mxm)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

٤- المصفوفة القطرية :-

القطر الرئيسي للمصفوفة المربعة يتكون من عناصر القطر الرئيسي $a_{ii} = a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$

وبقية العناصر تسمى العناصر خارج القطر الرئيسي

اي أن المصفوفة القطرية :- هي المصفوفة التي تكون فيها جميع العناصر أصفار ماعدا القطر الرئيسي

مثال :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥- مصفوفة الوحدة :-

هي مصفوفة قطرية فيها قيمة كل عنصر من عناصر القطر تساوي واحد. وتسمى مصفوفة العنصر المحايد الضربي. ويرمز لها بالرمز I_n والدليل n يشير الى رتبة المصفوفة المربعة

مثال :-

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

مثال (١) لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ فأوجد $A \cdot I_2$

الحل :-

$$A \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦- المصفوفة القياسية الثابتة:-

هي مصفوفة قطرية عناصر القطر الرئيسي فيها متساوية.

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

٧- المصفوفة الصفرية:-

هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها أصفار.

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٨- المصفوفة المثلثية العليا:-

هي المصفوفة التي تكون فيها جميع العناصر التي تحت القطر الرئيسي أصفار.

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

٩- المصفوفة المثلثية السفلى:-

هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها التي فوق القطر الرئيسي أصفار.

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١- المصفوفة المتبادلة:-

يقال بأن المصفوفتين A و B قابلتين للابدال. ويقال بأنهما ابدالتين عكسياً، اذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين وتحققان الشرط التالي:-

$$A.B = -B.A$$

منقول المصفوفة:- A^T

Transpose of matrix

تدوير المصفوفة:- هي عملية تبادل الصفوف والاعمدة من هذه العملية ينتج مدوّر المصفوفة «منقول المصفوفة»

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كما هو موضح أن الصف الأول في A يصبح العمود الأول في A^T والصف الثاني يصبح العمود الثاني اي أن :-

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \Longrightarrow A^T=[a_{ij}]_{n\times m}$$

مثال :-

$$A=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}_{3\times 1} \Longrightarrow A^T=[1\ \ 2\ \ 3]_{1\times 3}$$

$$B=[3\ \ 4\ \ 5]_{1\times 3} \Longrightarrow B^T=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

خواص مدوّر المصفوفة :- الحاضرة الخامسة

اذا كانت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ، $B=[b_{ij}]_{n\times q}$

فأن :-

$$(A.B)^T=B^T.A^T \quad (1)$$

$$(A+B)^T=A^T+B^T \quad (2)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣) $(A^T)^T = A$

٤) $(K.A)^T = K.A^T$

مثال:- اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

أثبت أن $(A.B)^T = B^T . A^T$

الحل:-

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 11 & 15 \\ 4 & -5 & -7 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$(A.B)^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 11 & -5 \\ 15 & -7 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3} \quad , \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 11 & -5 \\ 15 & -7 \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

مبرهنة :- اذا كانت A مصفوفة مربعة فبرهن أن $A + A^T$ مصفوفة متناظرة وأن $A^T \times A$ هي أيضاً مصفوفة متناظرة.

البرهان :-

$$A + A^T = (A + A^T)^T$$

$$= A^T + (A^T)^T$$

$$= A^T + A$$

$\therefore$ متناظرة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$(A^T \times A)^T = A^T \times (A^T)^T = A^T \times A$$

∴ متماثلة

11- المصفوفة المتماثلة :-

هي المصفوفة المربعة التي تكون فيها العناصر التي اعلى القطر الرئيسي لها نفس صورة العناصر التي تحت القطر الرئيسي أي أن $a_{ij} = a_{ji}$ اي بعبارة أخرى $A = A^T$

مثال :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A = A^T$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢- المصفوفة المتناظرة عكسياً :-

هي المصفوفة التي تمتلك نفس خواص المصفوفة المتناظرة لكن العناصر في أسفل القطر الرئيسي تكون بعكس إشارة العناصر التي في أعلى القطر الرئيسي

أي أن :- $a_{ij} = -a_{ji}$

بعبارة أخرى $A^T = -A$

على أن تكون عناصر القطر الرئيسي أصفار.

مثال :-

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة هي مصفوفة متناظرة عكسياً.

مثال :- لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

جد AB ، ثم جد BA ان أمكن ...

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل :-

$$A.B=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&3\\2&3&4\end{bmatrix}_{3\times3}\cdot\begin{bmatrix}1&-2\\-1&0\\2&-1\end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$A.B=\begin{bmatrix}3&-2\\5&-5\\7&-8\end{bmatrix}_{3\times2}$$

B.A يمكن الحل

$$B.A=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&0\\2&-1\end{bmatrix}_{3\times2}\cdot\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&3\\2&3&4\end{bmatrix}_{3\times3}$$

وذلك لأن عدد الاعمدة في B لا تساوي عدد الصفوف في A.

١٣- مسار المصفوفة $tr(A)$:-

هو حاصل جمع عناصر القطر الرئيسي $[A_{ij}]$ $i=1,2,\dots n$ للمصفوفة المربعة اي أن مسار المصفوفة المربعة A هو :-

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\dots+a_{nn}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال :- لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

جد $tr(A)$

الحل :-

$$tr(A) = 1 + 5 + 2 = 8$$

١٤ـ المصفوفة المتعامدة :-

يقال للمصفوفة المربعة A بأنها متعامدة اذا حققت الشرط الآتي :-

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$$

الشرط الضروري لكي تكون المصفوفة متعامدة هو أن المصفوفة في مدورها يساوي مصفوفة الوحدة.

مثال :- أثبت أن المصفوفة الآتية هي مصفوفة متعامدة.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل :-

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= I$$

١٥- المصفوفة الدورية :-

هي المصفوفة التي تحقق العلاقة $A^{k+1} = A$ حيث (k) عدداً موجباً واذا كان k أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $A^{k+1} = A$.

يقال بأن دورة المصفوفة هي k واذا كانت (k) تساوي واحد $(k=1)$ اي أن $A^2 = A$

يقال بأن المصفوفة متساوية القوى .

مثال :- لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

هل A مصفوفة دورية وكم دورتها؟

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

-35-

الحل:

$$A.A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A .$$

∴ المصفوفة A دورية ومقدار دورتها = ٢