العمليات السطرية الأولية:- المحاضرة السادسة

1. ضرب عناصر اي سطر بعدد غير صفري
2. تبادل موضعي سطرين
3. إضافة مضروب اي سطر الى سطر آخر.

المصفوفة الأولية:-

هي مصفوفة مربعة من السعة (nxn) يمكن تكوينها من المصفوفة الحايدة (I_n) بواسطة عملية واحدة من العمليات السطرية الأولية:-

المصفوفتين المتكافئتين سطرياً:

هما المصفوفتين التي تكون إحداهما ناتجة من الأخرى بواسطة سلسلة من العمليات السطرية الأولية:

مثال:-

لتكن $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ $\xleftarrow{-5r_1+r_2}$ $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

معكوس المصفوفة :-

اذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت B مصفوفة تحقق العلاقة $A.B = B.A = I$

حيث أن I هي مصفوفة الحايدة عندئذٍ يقال أن A قابلة للانعكاس ويطلق على المصفوفة B معكوس A ويرمز للمعكوس بالرمز A^{-1}

كيفية ايجاد معكوس المصفوفة :-

اذا كانت A مصفوفة مكافئة سطرياً للمصفوفة الحايدة I فأن إجراء سلسلة منتهية من العمليات السطرية الاولية على A تؤدي الى I ولهذا نستطيع ايجاد معكوس المصفوفة A عن طريق كتابة مصفوفة الوحدة والمصفوفة A بالشكل $[A : I]$ ثم اجراء سلسلة من العمليات السطرية الاولية على المصفوفة حتى نحصل على الشكل $[I : B]$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث يكون $B = A^{-1}$

مثال:- لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ أوجد A^{-1} ؟

الحل:-

$$[A : I] = \left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2r_1 + r_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_2 + r_1} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

I $\qquad$ $A^{-1} = B$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

للتحقيق:- التحقق من صحة الحل:-

$$A \cdot A^{-1} = I \Longrightarrow A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: لتكن $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&0\\1&2&2\end{bmatrix}$ جد A^{-1} إن وجدت أو برهن عدم وجود A^{-1}

الحل:

$$[A:I]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\1&2&2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&-1&-4&-2&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&4&2&-1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&4&2&-1&0\\0&0&-4&-3&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&1&4&2&-1&0\\0&0&-4&-3&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&-4&-3&1&1\end{array}\right]$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2r_3+r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

وعليه فأن

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

ملاحظة :- كل مصفوفة أولية قابلة للانعكاس كما أن هذا المعكوس هو مصفوفة أولية أيضاً

مثال :- أثبت أن $(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$

الحل :-

$$(A.B)(B^{-1}.A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}$$
$$=A.I.A^{-1}=I$$
$$(B^{-1}A^{-1})(A.B)=B^{-1}(A^{-1}A)B$$
$$=B^{-1}.I.B=I \quad \#$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تعريف :- يقال للمصفوفة A بأنها تحقق الصيغة المدرجة سطرياً المختزلة اذا تحققت الشروط التالية :-

١) اذا وجدت صفوف صفرية تكتب الى الاسفل.

٢) أول رقم غير صفري في كل سطر هو واحد يسمى الدليل.

٣) الدليل يتجه الى اليمين كلما اتجهنا الى الأسفل.

٤) العناصر فوق الدليل وتحت الدليل كلها أصفار.

ملاحظة :-

اذا تحققت الشروط ١ و ٢ و ٣ فقط تسمى الصيغة المدرجة سطرياً.
اذا تحققت الشروط ١ و ٢ و ٣ و ٤ تسمى الصيغة المدرجة سطرياً المختزلة.

أمثلة على الصيغة المدرجة سطرياً.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

وكذلك

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

أمثلة على الصيغة المدرجة سطرياً المختزلة.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

وكذلك ،

$$A\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

طريقة حذف كاوس :-

المحاضرة السابعة

إن منظومة المعادلات الخطية التي تتكون من m من المعادلات

و n من المجاهيل يمكن كتابتها بالشكل التالي :-

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

يمكن إن تكتب بصيغة المصفوفة على النحو التالي :-

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2n} & b_2 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

نسمي هذه المصفوفة بالمصفوفة الموسعة والمعتدة

يمكن التعبير عن هذه المصفوفة بالصيغة $AX = B$

وعن المصفوفة الحايدة بالصيغة $[A:B]$

يقال لطريقة حل منظومة المعادلات الخطية وبتحويل

المصفوفة الموسعة $[A:B]$ الى الصيغة المدرجة سطرياً

طريقة حذف كاوس.

ولطريقة حل المنظومة بتحويل مصفوفتها الموسعة الى الصيغة المدرجة سطرياً المختزلة هي طريقة حذف كاوس - جوردان.

مثال :- حل منظومة المعادلات الخطية بطريقة حذف كاوس

$$5X - 10y = 15$$
$$-2X - y = -1$$

الحل :-

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -10 & 15 \\ -2 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1/5}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{2r_1+r_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_2/5}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$y = -1$

$x - 2y = 3$

$x = 3 + 2y = 3 + 2(-1)$

$\therefore x = 1$

$\therefore$ مج $= \{(1, -1)\}$

لو كان المطلوب ايجاد طريقة حذف كاوس ـ جوردان فالحل سوف يكون بالشكل التالي :-

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{2r_2 + r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$x = 1$ ، $y = -1 \Leftarrow$ مج $= \{(1, -1)\}$.

مثال :- حل منظومة المعادلات الخطية بطريقة حذف كاوس وطريقة حذف كاوس ـ جوردان.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ الحل

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2/-5}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right] \xrightarrow{6r_2+r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3/-4}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Longrightarrow x_3 = 3$$

$x_2 + x_3 = 2 \Longrightarrow$

$x_2 = 2 - x_3 = 2 - 3 = -1$

$\therefore x_2 = -1$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$

$x_1 = 9 - 2(-1) - 3(3)$

$= 9 + 2 - 9 = 2$

$\therefore$ مج $= \{(2, -1, 3)\}$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نكمل بطريقة حذف كاوس - جوردان.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_2+r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_3+r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_3+r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{l} x_3 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_1 = 2 \end{array}$$

$\therefore$ مج $= \{(2, -1, 3)\}$

المحددات :-

لكل مصفوفة مربعة يوجد عدد ثابت معين يحدد المصفوفة بصورة عامة

$$|A| = \det(A)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner