كيفية ايجاد المحدد :-

1) محدد المصفوفة ذات السعة (1x1) هو :-

$$A = [a]_{1\times 1} \longrightarrow |A| = a$$

2) محدد المصفوفة ذات السعة (2x2)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

اي أن المحدد للسعة (2x2) هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي a_{11} ، a_{22} مطروحاً منه حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي $a_{12}a_{21}$.

مثال :- لتكن $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ فجد $|A|$ ؟

الحل :-

$$|A| = (-2)(4) - 3(-1)$$

$$= -8 + 3 = -5$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣) محدد المصفوفة ذات السعة (3×3) وهناك طريقتان لايجاده

١) طريقة الأقطار :-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

نعيد كتابة العمود الاول والثاني للمصفوفة A ثم نجمع حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي مع حاصل ضرب العناصر على الخطين الموازيين للقطر ثم نطرح منها حاصل ضرب العناصر على القطر الآخر المعاكس وحاصل ضرب العناصر على الخطين الموازيين له كما موضح أدناه

$$A = \begin{bmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{+}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} & \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - [a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}]$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال:- جد قيمة محدد المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

الحل:-

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (1)(1)(2)+(2)(3)(3)+(3)(2)(1)-[(3)(3)(1)$$
$$+(1)(3)(1)+(2)(2)(2)]$$

$$= 2+18+6-[9+3+8]$$

$$= 26-20 = 6$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

خواص المحددات :-

١) اذا كانت A مصفوفة مربعة فأن

$$|A| = |A^T|$$

مثال :- لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \Longrightarrow |A| = |1(3) - 2(2)|$$

$$= 3 - 4 = -1$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \Longrightarrow |A^T| = |1(3) - 2(2)|$$

$$= 3 - 4 = -1$$

$$\therefore |A| = |A^T|$$

٢) اذا كانت B مصفوفة ناتجة من المصفوفة المربعة A بالمبادلة بين أي سطرين أو عمودين من A

عندئذٍ ..

$$|B| = -|A|$$

مثال :-

$$|A| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$|A| = |0(1) - 1(2)| = -2$$

$$|B| = |2(1) - 1(0)| = 2$$

نلاحظ بأن $|B| = -|A|$ وذلك لتبادل السطرين الاول والثاني.

٣) اذا تساوى سطران أو عمودان في مصفوفة مربعة A فأن $|A| = 0$

مثال :- لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$

$\Longrightarrow |A| = 0$ وذلك لتساوي السطرين الاول والثاني

٤) اذا كان كل عنصر في سطر أو عمود في مصفوفة مربعة A يساوي صفر فأن $|A| = 0$

مثال :- لتكن $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

فأن $|A| = 0$ لاحتوائه على صف جميع عناصره أصفاراً

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥ اذا كانت المصفوفة B ناتجة من ضرب سطر أو عمود واحد في المصفوفة A بعدد ثابت K فأن $|B| = K|A|$

٦ اذا كانت المصفوفة B ناتجة من اضافة مضروب أحد السطور أو الاعمدة بثابت واضافته الى عمود أو سطر آخر فأن $|B| = |A|$

٧ اذا كانت A, B مصفوفتين مربعتين ولهما نفس الرتبة فأن:- $|A.B| = |A| . |B|$

مثال:- لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 2x2

$A.B = \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow |A.B| = 6(12) - 16(5)$

فأن $= -8$

$|A| = 4 - 12 = -8$

$|B| = 3 - 2 = 1$

$|A| . |B| = -8(1) = -8$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مبرهنة :-

المصفوفة المربعة A تكون قابلة للانعكاس (لها معكوس)
اذا وفقط اذا كان $|A| \neq 0$

مبرهنة :-

اذا كانت A مصفوفة مربعة قابلة للانعكاس فأن :-

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

ب طريقة العوامل المتممة :-

المصغر لعنصر a_{ij} في المصفوفة المربعة A يرمز لها بالرمز M_{ij} وهو المصفوفة الناتجة من حذف رقم i والعمود رقم j في المصفوفة .

العامل المتمم للعنصر a_{ij} يعرف بأنه حاصل ضرب $(-1)^{i+j}$ في محدد المصغر لـ a_{ij}

اي أن :- $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال :-

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(+)(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=(-)(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32})$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=(+)(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$\therefore |A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

مثال :- جد محدد المصفوفة بطريقة العوامل المتممة .

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

بأختيار السطر الاول

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=(+)(-1(1)-2(-2))=3$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=(-)((5)(-1)-(-2)(1))=3$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=(+)(5(2)-1(1))=9$$

$$\therefore |A|=\underset{a_{11}}{2}\underset{A_{11}}{(3)}+\underset{a_{12}}{(-1)}\underset{A_{12}}{(3)}+\underset{a_{13}}{3}\underset{A_{13}}{(9)}=30$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner