حل نظام المعادلات الخطية باستخدام المحددات (قاعدة كرامر)

الجامعة التاسعة

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

حيث a_{ij} ، b_i ثوابت معلومة وأن i تمثل عدد معادلات المعادلات في المعادلات الآنية $|A| \neq 0$ وأن

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad , X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad , X_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

وأن

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال :- استخدم قاعدة كرامر لحل منظومة المعادلات الآتية :-

$$-2X_1 + 3X_2 - X_3 = 1$$

$$X_1 + 2X_2 - X_3 = 4$$

$$-2X_1 - X_2 + X_3 = -3$$

الحل :- نوجد محدد المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

نوجد المحدد باستخدام السطر الثاني (بطريقة العوامل المتممة).

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= (1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(3-1) + (2)(-2-2) + (1)(+2+6)$$

$$|A| = -2 - 8 + 8 = -2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \Longrightarrow X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-4}{-2}$$

$$= 2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4$$

∴ مج = {(2, 3, 4)} وهو الحل.

طريقة ايجاد المعكوس باستخدام طريقة العوامل المرافقة

لكي يكون المصفوفة A معكوس يجب أن يكون محدد $|A| \neq 0$

يمكن ايجاد معكوس المصفوفة باستخدام طريقة المرافق من العلاقة

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T}{|A|}$$

واذ مدور المصفوفة العوامل المرافقة تسمى بالمصفوفة المصاحبة ويرمز لها بالرمز adj (A) اي أن :-

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال:- أوجد المعكوس باستخدام طريقة العوامل المرافقة

بعض واجب

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = 2(2)-3(1)=4-3=1$$

الحل:-

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\,M_{ij}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}|2|=2$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}|1|=-1$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}|3|=-3$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}|2|=2$$

$$\therefore A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix} \Longrightarrow A^{T}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}}{1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال :- اوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة A باستخدام طريقة العوامل المرافقة.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل :- بإختيار الصف الاول :-

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= (1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + (-1)(6-1) + 0 = -5$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}}{-5}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner