

تكون الأعداد الطبيعية سالفة مجموعتين جزئيتين من الأعداد الطبيعية $N \times N$ راجع نظريته 1.7
 (17) أرواح مرتبة الكون منها
 الأعداد الطبيعية

Let $N \times N = \{(n, m) : n, m \in N\}$. Define a relation R on $N \times N$ by

R on $N \times N$ by

$(n_1, m_1) R (n_2, m_2)$ iff $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$

$(n_1, m_1) R (n_2, m_2)$ iff $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$

Now, we prove that R is equivalence relation on $N \times N$

1. let $(n, m) \in N \times N, n, m \in N$

$$\therefore n + m = n + m \Rightarrow (n, m) R (n, m)$$

كل زوج مرتب له
علاقة مع نفسه

$\therefore R$ is reflexive.

2. let $(n_1, m_1), (m_1, m_2) \in N \times N$

$$s.t. (n_1, m_1) R (m_1, m_2) \quad \forall n_1, m_1, m_2 \in N$$

$$n_1 + m_2 = m_1 + m_1 \Rightarrow m_2 + n_1 = m_1 + m_2$$

لقد = أعداد طبيعية
لذا أ نضع التبادل

$$\Rightarrow m_1 + m_2 = m_2 + n_1 \Rightarrow (m_1, m_2) R (n_1, m_1) \therefore R \text{ is sy.}$$

3. let $(a, b), (c, d), (e, f) \in N \times N, a, b, c, d, e, f \in N$

(a, b) و (c, d) و (e, f) هي أعداد طبيعية

$$s.t. (a, b) R (c, d) \text{ and } (c, d) R (e, f)$$

$$a + d = b + c \text{ and } c + f = d + e$$

$$a + d + f = b + c + f \text{ and } c + f + b = d + e + b$$

$$\therefore a + d + f = d + e + b$$

عسرا راج تكون مجموعة الأعداد الطبيعية
التي هي عبارة عن أرواح مرتبة

$$\Rightarrow a + f = e + b$$

ما دام أن العلاقة تكافؤ متساوية
لها عبارة من صيغتك تكافؤ

$$\Rightarrow (a, b) R (e, f)$$

(a, b) و (e, f) هي أعداد طبيعية

$\therefore R$ is transitive.

لذا علاقة وهذه العلاقة تكافؤ

$\Rightarrow R$ is equivalence relation on $N \times N$.

Ques. 1. Write down the following in brief.

(a) Write down the following in brief.

(b) Write down the following in brief.

(c) Write down the following in brief.

(d) Write down the following in brief.

(e) Write down the following in brief.

(f) Write down the following in brief.

(g) Write down the following in brief.

(h) Write down the following in brief.

(i) Write down the following in brief.

(j) Write down the following in brief.

(k) Write down the following in brief.

(l) Write down the following in brief.

(m) Write down the following in brief.

(n) Write down the following in brief.

(o) Write down the following in brief.

(p) Write down the following in brief.

(q) Write down the following in brief.

(r) Write down the following in brief.

(s) Write down the following in brief.

(t) Write down the following in brief.

(u) Write down the following in brief.

(v) Write down the following in brief.

(w) Write down the following in brief.

(x) Write down the following in brief.

(y) Write down the following in brief.

(z) Write down the following in brief.

Def. 1. Let $a, b \in \mathbb{Z}$ s.t. $a = [a_1, a_2]$, $b = [b_1, b_2]$, then

1. $a + b = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)$
 $\downarrow$
 مساوية
 تكافؤ

نحول منطوق التكافؤ
 الى اذراج مرتبة

$$= (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)$$

$$= [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

2. $a \cdot b = [a_1, a_2][b_1, b_2] = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$

$$= a_1 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_2 + a_2 b_2$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2) - (a_2 b_1 + a_1 b_2)$$

$$= [a_1 b_1 + a_2 b_2, a_2 b_1 + a_1 b_2]$$

Ex. 1. Find $-3 + 7$ and $(-3)(7)$

$$-3 = [1, 4] = \{ (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (p, q) \sim (1, 4) \}$$

$$= \{ (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : p + 4 = q + 1 \}$$

$$= \{ (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : q = p + 3 \}$$

$$= \{ (1, 4), (2, 5), (3, 6), \dots \}$$

اذا $p=1$
 $q=4$
 وهكذا

$$7 = [8, 1] = \{ (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (p, q) \sim (8, 1) \}$$

$$= \{ (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : p + 1 = q + 8 \}$$

$$= \{ (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : q = p - 7 \}$$

$$= \{ (8, 1), (9, 2), (10, 3), \dots \}$$

اذا $q=1$
 $p=8$
 وهكذا

ترتيب لتعريف الجمع

$$-3 + 7 = [1, 4] + [8, 1] = [9, 5] = 4$$

$$-3(7) = [1, 4] \cdot [8, 1] = [8+4, 3+1] = [12, 3] = -21$$

اذا $a_1 b_1 + a_2 b_2 = b_1 + a_1 b_2$

properties of integer numbers:-

1. $a+b \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ قالب مغلق على الجمع والاضرب

2. $a+b = b+a$.

3. $(a+b)+c = a+(b+c)$.

4. $\exists 0 \in \mathbb{Z}$, s.t. $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. العنصر المحايد الجمعي

5. $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\exists -a \in \mathbb{Z}$, s.t. $a+(-a) = -a+a = 0$. هذا العنصر هو $-a$
 عكس الإشارة

6. $ab \in \mathbb{Z}$.

7. $ab = ba$.

8. $(ab)c = a(bc)$.

9. $\exists 1 \in \mathbb{Z}$, s.t. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. العنصر المحايد الضربي

لا ينص على وجود مع
المعكوس الجمعي الناتج
بإشارة معكوسة

لا يوجد معكوس ضربي
بالأعداد الطبيعية لأن
مقلوب الأعداد هو عدد نسبي
وهذا لا ينتمي إلى $\mathbb{Z}$

Proof (2) :- let $a, b \in \mathbb{Z}$, s.t. $a = [a_1, a_2]$, $b = [b_1, b_2]$,

صفتي التكافؤ يتكون من أعداد طبيعية

$a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$

$a+b = [a_1, a_2] + [b_1, b_2]$

$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)$
 $= [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$

$= [b_1 + a_1, b_2 + a_2]$

$= [b_1, b_2] + [a_1, a_2]$

$= b+a$.

Proof (4): ^{فدعنا} we claim that $0 = [m, m]$, $m \in W$ (19)

let $a \in Z$, s.t. $a = [a_1, a_2]$, $a_1, a_2 \in W$

Now, $a + 0 = [a_1, a_2] + [m, m] = [a_1 + m, a_2 + m]$

$$\begin{aligned} \text{من أجل عناصر هذه المجموعة} \\ \text{ومن أجل عناصر هذه المجموعة} \end{aligned} = (a_1 + m) - (a_2 + m)$$

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 \\ = (a_1 - a_2) = [a_1, a_2] = a \end{aligned}$$

to prove, $0 = [m, m]$ is unique

let $0 = [n, n]$

$\therefore m + n = n + m \Rightarrow (n, n) R (m, m) \Rightarrow [n, n] = [m, m]$.

الخواص (عز و حدث علاقة معنوية)
 تطابق معنوية هذه العناصر متساوية

Proof (7): let $a = [a_1, a_2]$, $b = [b_1, b_2]$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in W$

$$ab = [a_1, a_2][b_1, b_2]$$

$$= (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$$

$$= a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_1 b_2 + a_2 b_1$$

$$= b_1 a_1 - b_2 a_2 - b_1 a_2 + b_2 a_1$$

$$= (b_1 - b_2)(a_1 - a_2)$$

$$= [b_1, b_2][a_1, a_2]$$

$$= ba.$$