The Integers Numbers

(17) ازواج مرتب الكون منها الاعداد الصحيحة

Let $N \times N = \{(n,m) : n,m \in N\}$. Define a relation R on $N \times N$ by

$(n_1,n_2) R (m_1,m_2)$ iff $n_1+m_2 = n_2+m_1$

Now, we prove that R is equivalence relation on $N \times N$

1- let $(n,m) \in N \times N$, $n,m \in N$

$\because n+m = n+m \Rightarrow (n,m) R (n,m)$

$\therefore$ R is reflexive.

2- let $(n_1,n_2), (m_1,m_2) \in N \times N$

s.t $(n_1,n_2) R (m_1,m_2)$ $\forall n_1,n_2,m_1,m_2 \in N$

$n_1+m_2 = n_2+m_1 \Rightarrow m_2+n_1 = m_1+n_2$

$\Rightarrow m_1+n_2 = m_2+n_1 \Rightarrow (m_1,m_2) R (n_1,n_2)$ $\therefore$ R is sy.

3- let $(a,b),(c,d),(e,f) \in N \times N$ $a,b,c,d,e,f \in N$

s.t. $(a,b) R (c,d)$ and $(c,d) R (e,f)$

$a+d = b+c$ and $c+f = d+e$

$a+d+f = b+c+f$ and $c+f+b = d+e+b$

$\therefore a+d+f = d+e+b$

$\Rightarrow a+f = e+b$

$\Rightarrow (a,b) R (e,f)$

$\therefore$ R is transitive.

$\Rightarrow$ R is equivalence relation on $N \times N$.

Def.:- Let $a, b \in \mathbb{Z}$ s.t. $a=[a_1,a_2]$, $b=[b_1,b_2]$, then

1. $a+b = [a_1,a_2]+[b_1,b_2] = (a_1-a_2)+(b_1-b_2)$
$= (a_1+b_1)-(a_2+b_2)$
$= [a_1+b_1, a_2+b_2]$.

2. $a \cdot b = [a_1,a_2][b_1,b_2] = (a_1-a_2)(b_1-b_2)$
$= a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + a_2b_2$
$= (a_1b_1+a_2b_2)-(a_2b_1+a_1b_2)$
$= [a_1b_1+a_2b_2, a_2b_1+a_1b_2]$.

Ex.:- Find $-3+7$ and $(-3)(7)$

$-3 = [1,4] = \{(p,q) \in W \times W : (p,q) \sim (1,4)\}$
$= \{(p,q) \in \mathbb{N} \times W : p+4 = q+1\}$
$= \{(p,q) \in \mathbb{N} \times W : q = p+3\}$ اذا $p=1$
$= \{(1,4),(2,5),(3,6),\dots\}$ $q=4$ ← وهكذا

$7 = [8,1] = \{(p,q) \in \mathbb{N} \times W : (p,q) \sim (8,1)\}$
$= \{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : p+1 = q+8\}$
$= \{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : q = p-7\}$ اذا $q=1$ ، $p=8$ ← وهكذا
$= \{(8,1),(9,2),(10,3),\dots\}$ نرجع لتعريف المجموعة

$-3+7 = [1,4]+[8,1] = [9,5] = 4$.

$-3(7) = [1,4]\cdot[8,1] = [8+4, 32+1] = [12,33] = -21$.
$a_1b_2 \quad a_1b_1+a_2b_2$

Properties of integer numbers:-

1. $a+b \in \mathbb{Z}$, $a,b \in \mathbb{Z}$ — خاصية الجمع مغلقة في الأعداد الصحيحة
2. $a+b = b+a$.
3. $(a+b)+c = a+(b+c)$.
4. $\exists\, 0 \in \mathbb{Z}$, s.t. $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. العنصر المحايد الجمعي
5. $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\exists\, -a \in \mathbb{Z}$, s.t. $a+(-a) = -a+a = 0$. — هذا المعكوس عكس الإشارة — كل عنصر من زوجه مع المعكوس الجمعي الناتج يساوي صفر
6. $ab \in \mathbb{Z}$. — خاصية الضرب مغلقة في الأعداد الصحيحة
7. $ab = ba$.
8. $(ab)c = a(bc)$.
9. $\exists\, 1 \in \mathbb{Z}$, s.t. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. — العنصر المحايد الضربي — لا يوجد معكوس ضربي بالأعداد الصحيحة لأن معكوب الأعداد الصحيحة لو وجد سيخرج عن الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

Proof(2):- let $a,b \in \mathbb{Z}$, s.t. $a=[a_1,a_2]$, $b=[b_1,b_2]$. — صف التكافؤ يتكون من أعداد طبيعية $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$

$$a+b = [a_1,a_2]+[b_1,b_2]$$

$(a_1-a_2)+(b_1-b_2) = (a_1+b_1)-(a_2+b_2)$

$$= [a_1+b_1,\ a_2+b_2]$$

$$= [b_1+a_1,\ b_2+a_2]$$

$$= [b_1,b_2]+[a_1,a_2]$$

$$= b+a.$$

Scanned with CamScanner

Proof(4):- we claim that $0=[m,m]$, $m\in W$ (19)

let $a\in Z$, s.t. $a=[a_1,a_2]$, $a_1,a_2\in W$

Now, $a+0=[a_1,a_2]+[m,m]=[a_1+m,a_2+m]$

$=(a_1+m)-(a_2+m)$

$=(a_1-a_2)=[a_1,a_2]=a$

to prove $0=[m,m]$ is unique

let $0=[n,n]$

$\because m+n=n+m \Rightarrow (n,n)\,R\,(m,m) \Rightarrow [n,n]=[m,m]$.

Proof(7):- let $a=[a_1,a_2]$, $b=[b_1,b_2]$, $a_1,a_2,b_1,b_2\in N$

$$ab=[a_1,a_2][b_1,b_2]$$

$$=(a_1-a_2)(b_1-b_2)$$

$$=a_1b_1-a_2b_2-a_1b_1+a_2b_2$$

$$=b_1a_1-b_2a_2-b_1a_1+b_2a_2$$

$$=(b_1-b_2)(a_1-a_2)$$

$$=[b_1,b_2][a_1,a_2]$$

$$=ba.$$