Proof(9):- let $1=[n+1,n]$ $a=[a_1,a_2]$, $n,a_1,a_2\in W$

$$a\cdot 1=[a_1,a_2][n+1,n]$$
$$=(a_1-a_2)((n+1)-n)$$
$$=a_1n+a_1+a_2n-a_1n-a_2n-a_2$$
$$=(a_1-a_2)=[a_1,a_2]=a$$

Now, to prove $1=[n+1,n]$ is auniqeue.

let $[m+1,m]=1$, $[n+1,n]=1$. $[n-1,n]=1$

Since $n+1+m=m+1+n$

$\Rightarrow (n+1,n)\,R\,(m+1,m)$

$\Rightarrow [n+1,n]=[m+1,m]$.

Definition:-

1. If $a=[a_1,a_2]$, $b=[b_1,b_2]$, then $a<b$ iff

$a_1+b_2<a_2+b_1$, $a,b\in Z$, $a_1,a_2,b_1,b_2\in W$

2. If $a\in Z$ and $a=[a_1,a_2]$, then a is said to be a positive iff $a_1>a_2$ and if $b\in Z$ and $b=[b_1,b_2]$, then b is said to be a negative iff $b_1<b_2$

i.e. $a\in Z^+$ iff $a_1>a_2$

$a\in Z^-$ iff $a_1<a_2$

Ex:- $8=[10,2]$, $-5=[5,10]$.

Definition:- If $a=[a_1,a_2]$, $b=[b_1,b_2]$, $a_1,a_2,b_1,b_2 \in N$.
Then $a-b = a+(-b) = [a_1,a_2]+[b_2,b_1]$

Example: $8-11 = [10,2]+(-1)[15,4]$

$= [10,2]+[4,15]$

$= [14,17] = -3$

Theorem:- 1. let $a \in Z$, then $a>0$ iff $a \in Z^+$. H.W

2. let $a \in Z$, then $a<0$ iff $a \in Z^-$.

داعياً تحاولوا لهذا التكل

Proof (2):- let $a=[a_1,a_2]$, $a_1,a_2 \in N$ and let $0=[n,n]$

suppose that $a<0 \Rightarrow [a_1,a_2] < [n,n]$

نفرضهم سالب صفر

$\Rightarrow a_1+n < a_2+n$ التكافؤ

قانون الحذف صحيح

since $a_1,a_2 \in N$, then $a_1 < a_2$

$\Rightarrow a \in Z^- \Rightarrow a<0$ (by definition)

$\Leftarrow$ let $a \in Z^-$, then $a_1 < a_2$

نضيف الناقص

الثانية n

$\Rightarrow a_1+n < a_2+n$

$\Rightarrow [a_1,a_2] < [n,n]$

$\Rightarrow a<0$.

واحد فقط من هذه العبارات يتحقق

Theorem:- If $a \in Z$, then exactly one of the following hold:- $a>0$ or $a=0$ or $a<0$
موجب سالب

Proof:- let $a=[a_1,a_2]$, $a_1,a_2 \in N$, $a \in Z$

From theorem (If $m,n \in N$, then exactly one of the hold $m>n$ or $m=n$ or $m<n$)

if $a_1>a_2 \Rightarrow a \in Z^+ \Rightarrow a>0$.

if $a_1=a_2 \Rightarrow a=0$ $\quad a=[a_1,a_1]=0$

if $a_1<a_2 \Rightarrow a \in Z^- \Rightarrow a<0$.

Lemma:- let $a,b \in Z$. Then

1. if $a,b \in Z^+$, then $a+b \in Z^+$, $ab \in Z^+$.
2. if $a,b \in Z^-$, then $a+b \in Z^-$, $ab \in Z^+$.
3. if $a \in Z^+$, $b \in Z^-$, then $ab \in Z^-$.

Proof(1):- let $a=[n+1,0]$ (نعبرعنه الكبر من الصفر), $b=[m+1,0]$ (الكبر من الصفر)

$$a+b=[n+1,0]+[m+1,0]$$

$$=(n+1)+(m+1)-(0+0)$$

$$=((n+m+1)+1,0)$$

$$=[l+1,0], \text{ where } n+m+1=l \in N$$

$a_1>a_2$ لأن $\therefore a+b \in Z^+$.

$ab = [n+1, 0][m+1, 0]$

$= (n+1)(m+1) + 0 + 0 + 0$

$= nm + n + m + 1 + 0$

$= [k+1, 0] \in Z^+$, where $nm + n + m = k \in N$

$\therefore ab \in Z^+$.

Proof(2):- let $a = [0, n+1] \in Z^-$, $b = [0, m+1] \in Z^-$

$ab = [0, n+1][0, m+1]$

$= (0, n+1)(0, m+1)$

$= (0-(n+1))(0-(m+1))$

$= [0 + (n+1)(m+1), 0(m+1) + (n+1)0]$

$= (0 + nm + n + m + 1, 0)$

$= [k+1, 0] \in Z^+$.

Proof(3):- let $a = [n+1, 0]$, $b = [0, m+1]$, $a \in Z^+$, $b \in Z^-$
$a > 0$ $b < 0$

$ab = [n+1, 0][0, m+1]$

$= (n+1-0)(0-(m+1))$

$= (n+1)0 - 0 - (n+1)(m+1) + 0$

$= 0 - (n+1)(m+1)$

$= [0, (n+1)(m+1)]$

$= [0, k] \in Z^-$.

CamScanner

The Rational Numbers Q :-

مثلما انشأنا الاعداد الصحيحة Z من الاعداد الطبيعية N عن طريق تعريف علاقة تكافؤ على $N \times N$ يمكن اتباع اسلوب مشابه لتعريف الاعداد النسبية Q بتعريف علاقة تكافؤ ملائمة على مجموعة جزئية من $Z \times Z$ لقد كان الغرض من انشاء Z حوان معادلة من نوع $(X+3=1)$ لا يوجد لها حل في N بينما لها حل في Z وكذلك المعادلة $(2X=3)$ ليس لها حل في Z لذلك تم انشاء الاعداد النسبية .

let $Z \times Z = \{(n_1, n_2) : n_1, n_2 \in Z\}$. Define a relation R on $Z \times Z$ by

علاقة — ضرب

$(n_1, n_2) R (m_1, m_2)$ iff $n_1 m_2 = n_2 m_1$ الحو علاقة مضلع الضاضوء متساوية — وهذه جاءت من كل اثنين يتصل

$\left(\frac{n_1}{n_2} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow n_1 m_2 = n_2 m_1 , n_1, n_2, m_1, m_2 \in Z \right)$

Now, we prove that R is equivalence relation on $Z \times Z$.

1- let $(n_1, n_2) \in Z \times Z$, $n_1, n_2 \in Z$ — كل زوج مرتب له علاقة مع نفسه

$\because n_1 n_2 = n_1 n_2 \Rightarrow (n_1, n_2) R (n_1, n_2)$ $\therefore$ R is ref.

2- let $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in Z \times Z$, $n_1, n_2, m_1, m_2 \in Z$

such that $(n_1, n_2) R (m_1, m_2)$

$\Rightarrow n_1 m_2 = n_2 m_1$ — قلنا اعداد صحيحة

$\Rightarrow m_2 n_1 = m_1 n_2$ — عملية الضرب تبديلية

$\Rightarrow m_1 n_2 = m_2 n_1$ — بالاعداد الصحيحة

$\Rightarrow (m_1, m_2) R (n_1, n_2)$

$\rightarrow$ R is symmetric.