الفصل الثاني
النماذج والنمذجة

2-1 مقدمة:

يتضمن هذا الفصل مقدمة عامة عن عدد من المفاهيم الأساسية ذوات العلاقة مع مفهومي "النموذج" و"النمذجة". وتتضمن هذه المقدمة إيضاحاً لبعض استخدامات مصطلح "نموذج" في مجالات الحياة العامة وكذلك في المجالات العلمية. ويتم التركيز – بشكل خاص – على النماذج الرياضية وتصنيفاتها من رؤى مختلفة. ثم يتناول الفصل مفهوم "النمذجة الرياضية" واستخداماتها وكذلك مراحل بناء النموذج الرياضي.

2-2 النظام والمتغيرات والثوابت : System, Variables and Constants

يعد مصطلح "**النظام**" من المصطلحات العصرية المستخدمة في العديد من المجالات العلمية والتقنية والاقتصادية والاجتماعية. ومن المجالات العلمية التي تتعامل مع مفهوم النظام، نظرية النظام System Theory، وعلم التحكم الآلي Cybernetics، والنظم الحركية Dynamical Systems. وعلى نحوٍ عام يمكن تعريف **النظام System** بأنه مجموعة من المركبات المتفاعلة.

إن **النظام الرياضي Mathematical System** هو تركيب مُنشأ

من مجموعة واحدة أو أكثر من أشياء ومفاهيم غير معرّفة ومجموعة من البديهيات Axioms ذوات العلاقة مع هذه الأشياء والمفاهيم(*).

نتعامل في حياتنا اليومية مع أشياء ثابتة وأخرى متغيرة. والثابت Constant هو الذي يحمل قيمة راسخة لا تتغير ولا تتبدل بتغير الزمن أو الظروف الأخرى، مثلا النسبة بين طول محيط أية دائرة ونصف قطرها هي كمية ثابتة، يطلق عليها النسبة الثابتة ويرمز لها π وقيمتها العددية 22/7. أما المتغير Variable فهو التعبير الذي لا يأخذ قيمة واحدة دائما ويمكن لقيمته التغيّر تبعاً لتغيّر متغيرات أو أدلة أخرى. فلو تأملنا ما بأجسادنا من وزن وطول وعمر وخصائص فيزياوية وكيماوية، نجد أنها في تغيّر. ولو تأملنا ما حولنا من ظواهر طبيعية مثل درجات حرارة ورطوبة نسبية وسرعة رياح نجد أنها في تغيّر مستمر. ولو تأملنا عالمنا الذي نعيش فيه، نجد أن كل شيء في تغيّر مستمر، كعدد السكان وأسعار السلع والمنتجات. ونود أن نشير إلى أن مصطلح المتغير في الرياضيات يُقصد به تعبير يمكن أن يعطي أية واحدة من مجموعة قيماً ممكنة، ويرمز له عادة بحرف من الحروف اللاتينية. أما في علوم الحاسوب فيعرّف المتغير بأنه اسمُ رمزي يرتبط بقيمة، وأن قيمته المرتبطة قَدْ تتغيّر. ونولي عادة اهتمامات كبيرة في دراسة

المتغيرات، فيهمنا معرفة التغيرات الحاصلة في حالة الطقس، والتقلبات في الأسعار، والتغيرات في مفاصل حياتية شتى.

يُعرّف **المتغير Variable** في الرياضيات بأنه تعبير رياضي يمكن أن يعطي أية واحدة من مجموعة قيماً ممكنة. أما **الثابت Constant** فهو القيمة التي لا تتغيّر. إن **المتغيرات المستقلة Independent Variables** تعد مدخلات Inputs لنظام، ويمكنها أن تأخذ قيماً مختلفة بحرية. **أما المتغيرات المعتمدة Dependent Variables** فهي تلك القيم التي تتغير بوصفها نتائج لتغيّر قيم أخرى في النظام. وعندما يمكن إيجاد قيمة بالكامل بوساطة قيمة أو مجموعة قيم أخرى، فإننا نقول إن هذه القيمة هي دالة Function بدلالة تلك القيمة، أو القيم الأخرى.

يمكن تصنيف المتغيرات من رؤى مختلفة، وسنبين في أدناه عدداً منها:

1- من حيث الاستمرارية:

يكون المتغير إما **متقطعاً Discrete** ، إذا كان يأخذ قيما منفصلة يُعبّر عنها عادة بأعداد صحيحة، أو **مستمراً Continuous** إذا كان يأخذ قيما متصلة يُعبّر عنها عادة بأعداد حقيقية. فأعداد أي أحداث تكون متغيرات متقطعة، في حين تكون الكميات الفيزياوية متغيرات مستمرة.

2- من حيث الحتمية:

يكون المتغير **حتمياً Deterministic** إذا كان يمكن تحديده على نحوٍ منفرد (بطريقة وحيدة) Uniquely بوساطة معلمات Parameters النموذج وبمجموعات الحالات States السابقة لهذه المتغيّرات. ويكون المتغير **غير حتمي Non –Deterministic**(أو **تصادفياً Stochastic)** إذا كان لا يوصف بقيم وحيدة، بل بوساطة توزيعات احتماليةProbability Distributions.

3- من حيث الاستقلالية:

يكون المتغير **مستقلاً** Independent (من الناحية النظرية) إذا كان لا يعتمد على متغيرات أخرى، وبخلاف ذلك يكون معتمداً Dependent .

2-3 النماذج Models:

تُستخدم في حياتنا اليومية كلمة "نموذج" في مجالات شتى: ففي التجارة تُستخدم كلمة "نموذج" ويعنى بها جزء قليل من السلعة يُستخدم لتمثيل السلعة الكلية، وفي الكيمياء وعلوم الأرض تُستخدم كلمة "نموذج" ليعنى بها جزء قليل من مادة يستخدم لتمثيل المادة الكلية، وفي عالم الأزياء تُستخدم كلمة "نموذج" ليعنى بها شخص يقوم بعرض أحدث الملابس. أما في الجانب العلمي، فلهذا المصطلح استخدامات كثيرة في العلوم الرياضية والحاسوبية والتقنية.

النموذج Model هو عبارة عن وصف افتراضي أو تمثيل سَهل أَو وصفَ مُصمم أو نمط Pattern لكيان معين أو عملية معينة. وهو تجريد للواقع لغرض توصيف نظام معين. إن المصطلح "نموذج Model " هو اسم مُشتق أصلا من الكلمة اللاتينية " Modellus"، والتي تعني "تقليد شديد الصّغر لمُعامل أَو معيار أَو مقياس". وفي القرن السادس عشر الميلادي أُستُعمل

هذا المصطلح باللغة الفرنسية بهيئة (Modµele)، ليُعنى به "تمثيل صغير لشيئ ما". ثم انتشر هذا المصطلح إلى اللغاتِ الأخرى مثل الإنجليزية والألمانية. إن الفعل المرتبط بالاسم "نموذج" هو "**نمذجة Modeling** "، والنمذجة تصِف طريقة نموذجية لتعامل الإنسان مع الواقع.

إن النماذج التي نتعامل معها ممكن أن تكون:

أ- نماذج عامة General Models: تتضمن هيئات ومسميات ذوات استخدامات عامة، كنماذج من سلع معينة.

ب- نماذج خاصة Special Models: تتضمن هيئات ومسميات ذوات استخدامات خاصة ومتخصصة في مجالات معينة، ومن هذه النماذج:

1- **نماذج معمارية:** كنماذج التصاميم المعمارية التي تصنع من الكارتون أو البلاستيك.

2- **نماذج جغرافية:** كالخرائط المختلفة.

3- **نماذج حياتية:** كنماذج لأعضاء جسم كائن حي أو مخططات لأجهزته المختلفة.

4- **نماذج كيمياوية:** كالعينات المأخوذة لفحص مختبري معين.

5- **نماذج رياضية:** كالعلاقات والمعادلات والمتراجعات الرياضية.

6- **نماذج حاسوبية:** كالبرامج والمخططات الانسيابية.

7- **نماذج محاكاتية:** أدوات رياضية وحاسوبية منشأة لغرض إجراء تجارب محاكاتية.

8- **نماذج ماركوفية:** مبنية أساسا على المفاهيم والأفكار التي تتضمنها سلاسل ماركوف.

2-4 النمذجة العلمية Scientific Modeling:

من الناحية العلمية فإن **النموذج** عبارة عن تمثيل رياضي أو منطقيّ أو فيزياوي لنظام من الكيانات، أو الظواهر Phenomena، أَو العمليات Processes . والنموذج هو تلخيص مُسَهّل لإعطاء رؤية مِن الحقيقة المعقّدة، وقَدْ يُركّز على نوع خاص مِنْ وجهاتِ النظر. ومن الناحية الشّكلية يعدّ النموذج تفسيراً يَتعامل مع الكيانات التجريبية، والظواهر، والعمليات الطبيعية بطريقة رياضية، أَو منطقيّة. كذلك فالنموذج هو الطريق الذي فيه يُمْكِن لعمليات الفكر الإنساني أَنْ تُضخّم.

إن مصطلح "**نموذج Model** " لَه معانٍ مختلفة في نظرية النموذج Model Theory، وهي فرع في المنطق الرياضي Mathematical Logic. و**النموذج Model هو واقع مصغّر لشيء ما، كما أنه انعكاسات مبسطة للواقع.** إن النموذج العلمي Scientific Model يهدف إلى تمثيل الكائنات التجريبية والظواهر والعمليات الفيزيائية بطريقة منطقية وموضوعية. إن بناء النماذج يعد أمرا أساسيا لأي مشروع علمي. وقد يكون من المستحيل الحصول على تمثيل كامل وحقيقي للواقع بوساطة النموذج، إلا أن المناظرة العلمية في أغلب الأحيان تتعلّق باختيار النموذج الأفضل لغرض انجاز مهمّة مُعطاة، مثلا اختيار نموذج المناخ الأكثر دقّة لغرض إيجاد التكهنات الموسميّة Seasonal Forecasting.

إن النمذجة العلمية هي عملية بناء نماذج رياضية مجردة وتصوّرية وبيانية. إن العلم يقدم باستمرار العديد من الأساليب والتقنيات لمعالجة مختلف المسائل في شتى أنواع النمذجة العلمية

المتخصصة. ويمكن للنموذج العلمي توفير الوسائل العلمية الرصينة لتسهيل التعامل مع مختلف الظواهر وزيادة فهمها وتيسير التعامل معها إلى أبسط شكل من الأشكال. إن النمذجة جزء ضروري وملازم لكُلّ نشاط علمي. وهناك الشيئ القليل حول نظرية عامّة عن النمذجة العلمية، مُقَدّمة من فلسفة العلم ونظرية الأنظمة وحقول أخرى جديدة.

2-7 النمذجة الرياضية Mathematical Modeling:

إن النمذجة Modeling(*)عملية بناء نماذج تقوم بتلخيصيات تصورية أو بيانية لظاهرة ما أو كيان أو نظام معين. وتعد النمذجة من المجالات العلمية التي تستقطب أنظار الباحثين لأنها تتداخل مع مختلف مفاصل الحياة العملية. وأضحى مصطلح "النمذجة" من المصطلحات العصرية الشائعة في تخصصات شتى، ولم يعد استخدامه محصورا على العلوم الرياضية. وتتضمن النمذجة تزاوجاً لأفكار مِن مجالات مُخْتَلِفة.

إن الذي يقوم بالنمذجة، والذي يدعى مُنمذج Modeler، يُفترض أن يتمتع بالكفاءة لكي يستطيع أن يَعطي نَتائِج مفيدة وموثوقة وذات بصيرة. كذلك يفترض بالمُنذج أَن يَكُون قادرا على التمييز فيما إذا كان النموذج يَعْكس الحقيقة، ويتعامل مع الانحرافات بين القيم النظرية والبيانات. وتتضمّنُ تقنيات النمذجة طرائقَ إحصائيةَ Statistical Methods، ومحاكاة حاسوبية Computer Simulation، ومماثلة (مطابقة) نظام System Identification، وتحليل الحساسية Sensitivity Analysis. ويبقى الشيء الأكثر أهمية، القدرة لفَهْم الحركة التحتية للنظام المعقّد الذي يتم التعامل معه. إن هذه البصائر تتطلب تَقييماً فيما إذا كانت فرضيات النموذج صحيحة وكاملة أم لا.

إنّ (فنّ Art) بناء النماذج الرياضية تسمى نمذجة رياضية. وتستخدم عادة كلمة "بناء" عند إنشاء نماذج رياضية وذلك لأن هذه العملية تكون بخطوات متسلسلة على وفق نسق معين وبشكل مشابه لبناء عمارة. كما أن للمهارة والكفاءة الشخصية للمُنمذج دوراً مهماً في بناء النموذج، لذا فان النمذجة الرياضية تعد فناً.

تُصنّف مسائل النمذجة الرياضيةِ في أغلب الأحيان إلى نماذج صندوق أسود Black Box Models أَو نماذج صندوق أبيض White Box Models، طبقاً لكَمْ المعلومات المسبقة Prior Information المتوافرة عن النظامِ. إن نموذج الصندوق الأسود هو ذلك النموذج الذي لا يوجد فيه أية معلومات مُسبقة عن النظام المتعلق به. أما نموذج الصندوق الأبيض (ويسمّى أيضاً الصندوق الزجاجي أَو الصندوق الواضح) فإن جميع المعلومات الضرورية عن النظام تكون متوافرة فيه. ومن الناحية العملية فإن الغالبية العظمى من الأنظمة تكون في مكان ما بين نماذج الصندوق الأسود ونماذج الصندوق الأبيض، تبعا لكمية المعلومات المتوافرة فيها.

عادة يكون من المفضّل استِعْمال أكبر قدر من المعلومات المسبقة لجَعْل النموذج أكثر دقّة وبطبيعة الحال فإن نماذج الصندوق الأبيض تعد أسهل، لأنها إذا أُستعملت معلوماتها على نحو صحيح، فإنها سوف تعطي ثماراً جيدة. وفي أغلب الأحيان فإن المعلومات المُسبقة تأتي من معرفة أنواع الدوال المتعلقة بالمتغيرات المختلفة. فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا نموذج رياضي

عن كيفية عمل دواء معين داخل نظام بشري (جسم الإنسان)، فمن المعروف علميا أن فعالية الدواء تضمحل (تتلاشى) أسيّا Exponentially Decaying (بشكل دالة أسيّة). ومع ذلك يبقى هنا عدد من المعلمات المجهولة، مثل:

ما سرعة اضمحلال الدواء؟

وما الكمية الابتدائية من الدواء في الدم؟

لذا فإن هذا المثال ليس تماما لنموذج صندوق أبيض (بل هو لصندوق رمادي، بين الأبيض والأسود). وبطبيعة الحال فإن هذه المعلمات المجهولة يَجِب تقديرها قبل أن يُستعمل هذا النموذج.

أما في نماذج الصندوق الأسود فيجب تقدير كل من شكل العلاقة الدالية بين المتغيرات وكذلك القيم العددية للمعلمات المجهولة. فعلى سبيل المثال يمكن الاستعانة ببعض الطرائق الإحصائية الحديثة، مثل التقدير اللبي Kernel Estimation، لتقدير شكل العلاقة، فضلاً عن الطرائق الإحصائية التقليدية الأخرى لتقدير المعلمات المجهولة، انظر الفصل الثامن. ومن التقنيات الحاسوبية الحديثة الشائعة حاليا مع نماذج الصندوق الأسود تقنية الشبكات العصبيةَ Neural Networks التي لا تكون فيها فرضيات حول البيانات المتوافرة، وهذه التقنية هي خارج توجهات هذا الكتاب.

2-8 مراحل بناء النموذج الرياضي

:Stages of Mathematical Model Building

تبدأ النمذجة الرياضية عادة بمسألة من الحياة الواقعية، وتمر بعدد من المراحل، العامة والخاصة، وحسب طبيعة المسألة قيد الدراسة. فقد تكون المسألة إدارية أو مالية أو تقنية أو تنظيمية أو طبية أو أي جانب من جوانب الحياة المختلفة. وفي مجال النمذجة الرياضية هناك ست مراحل أساسية يمر بها النموذج الرياضي عند بنائه وقبيل التوصية باستخدامه. وهذه المراحل هي على النحو الآتي (انظر الشكل(2-2)):

المرحلة الأولى: وضع الفرضيات للنموذجِ Assumptions for Model: تبدأ هذه المرحلة بترجمة المسألة الواقعية إلى مسألة رياضية من خلال فرض عدد من الفرضيات السهلة التي تنسجم مع طبيعة المسألة الواقعية وواقعها.

المرحلة الثانية: الصياغة الرياضية للمسألة Mathematical Formulation of the Problem: تُشخص المتغيرات والعلاقات فيما بينها، ثم بالاستعانة بالفرضيات المفروضة في المرحلة الأولى تُحوّل المسألة إلى مسألة رياضية.

المرحلة الثالثة: حل المسألة الرياضيةSolution of the Mathematical Problem: يُستعان بالتقنيات الرياضية والحاسوبية المتاحة لإيجاد الحل الرياضي للمسألة، والحل الرياضي قد يكون على هيئة حل تحليلي Analytical Solution أو حل عددي Numerical Solution . إن الحل

العددي عادة هو تقريب للحل التحليلي الذي لا يكون متاحاً دائماً. كما أن الحل العددي يعتمد على طرائق وسياقات مختلفة حسب طبيعة المسألة قيد الدراسة.

المرحلة الرابعة: تفسير الحل Interpretation of the Solution: يتم تفسير الحل وواقعيته ومدى انسجامه مع المسألة الواقعية باستخدام عدد من التقنيات الرياضية مثل:

أ- رسم الحل.

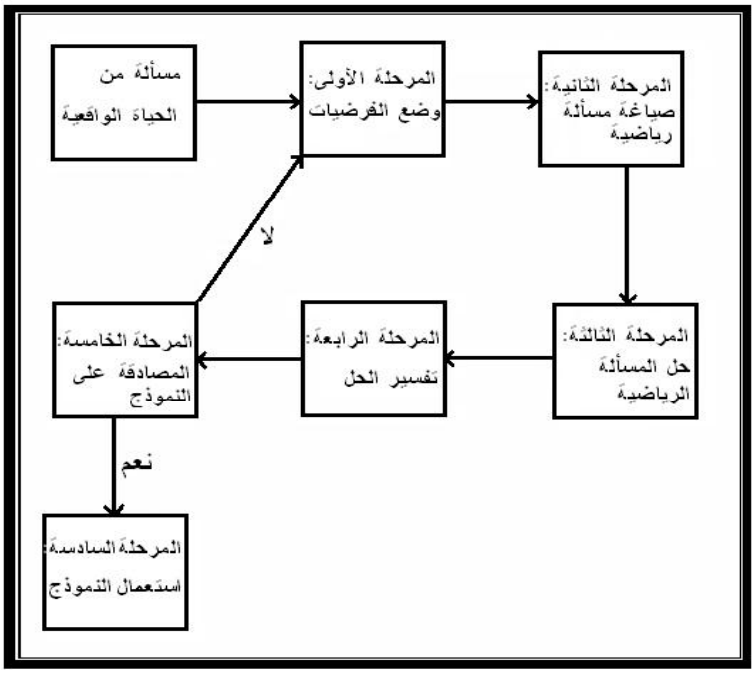
ب- إجراء المحاكاة للنموذج.

ت- اختبار عشوائية بواقي النموذج، إن أمكن ذلك.

ث- اختبار كفاءة النموذج في التنبؤ، إن أمكن ذلك.

المرحلة الخامسة: المصادقة على النموذج Model Validation: في ضوء معطيات المرحلة الرابعة إما أن يُصادَق على النموذج، إذا كانت نتائجه إيجابية، أو لا يُصادَق عليه، وفي هذه الحال نعود من جديد إلى المرحلة الأولى لتطوير الفرضيات.

المرحلة السادسة: استعمال النموذج: بعد نجاح النموذج في جميع المراحل السابقة، يمكن استعماله للأغراض التي بُني من أجلها، مثل التَوضيح Explanation ، والتنبؤ Prediction ، والقرار Decision، والتصميم Design ... الخ.



الشكل (2-2): مراحل بناء نموذج رياضي.