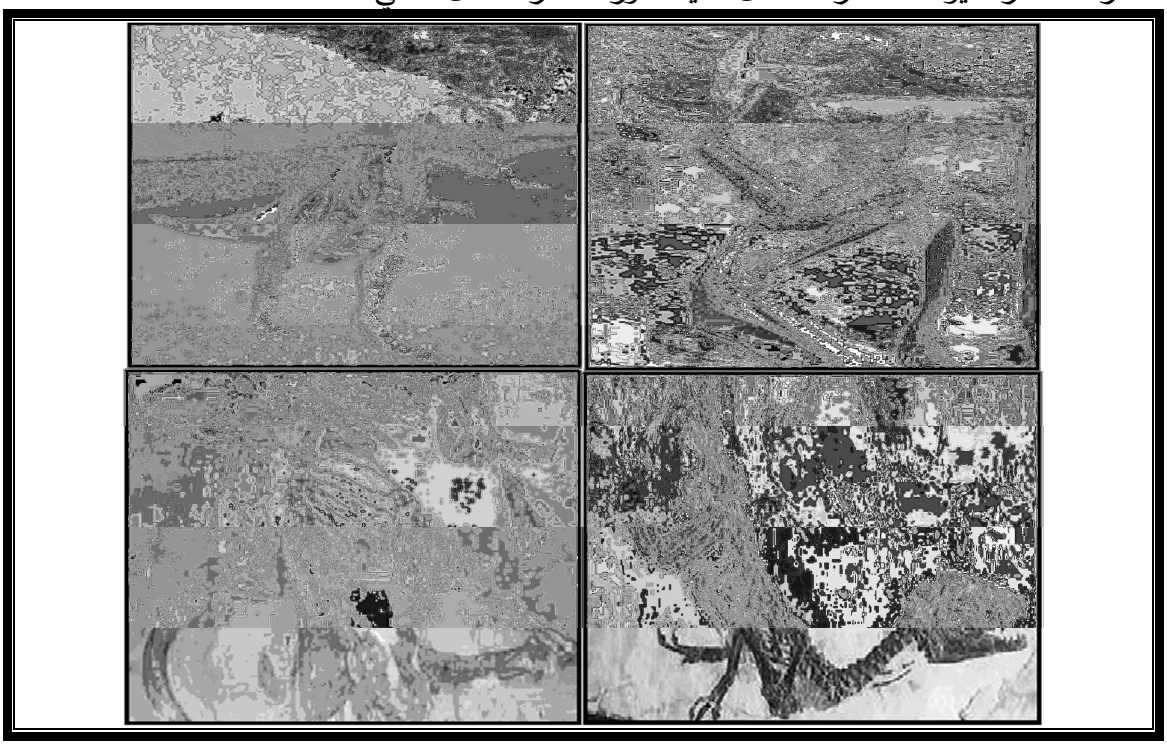
الفصل الثالث عشر

نمذجة النمو والاضمحلال

Modeling Growth and Decay

تطبيقات تحديد التواريخ بالكربون المشع في تقدير الأعمار

باستخدام تقنية العمر النصفي فقد قُدر عمر إنسان المانجو بستة وخمسين ألف عام، كما قُدرت أعمار حيوانات منقرضة مثل الديناصور، انظر الشكل الآتي.



الشكل(12-14) إنسان المانجو والديناصور

المثال (13-5)

في عيّنة متحجّرة كانت نسبة الكربون 14 إلى الكربون الطبيعي مقارنةً بالنسبة الطبيعية تساوي 10%، فكم يبلغ العمر التقريبي لهذا المتحجر؟

الحل

بالتعويض في العلاقة (13-33) نجد أن العمر التقريبي لهذا المتحجر هو:

$$t = -\frac{\ln(0.10)(5730)}{(0.6931)} = -\frac{-2.3026(5730)}{0.6931} = 19036 \ \ years.$$

المثال (13-6)

عنصر مشع لديه نسبة نضوب مقدارها 2% لكل 20 سنة. استخدم كل من طريقتي النمذجة باستخدام المعادلات التفاضلية والمعادلات الفرقية للإجابة عن كل مما يأتي:

أ- إذا كانت الكمية الابتدائية من هذه العنصر هي 165 غرام، فكم سوف يبقى من هذه الكمية بعد 60 سنة؟

ب- ما العمر النصفي لهذا العنصر؟

ت- بفرض أن عظام حيوان معين تُبقي على نسبة ثابتة من هذا العنصر المشع خلال حياتها، ثم يبدأ هذا العنصر بالنضوب حال موت الحيوان. فإذا وجد عظم من هذا الحيوان، ووجد أنه يحوي على 10% من المستوى الطبيعي للعنصر المشع، قدّر عمر ذلك الحيوان.

الحل

باستخدام المعادلات التفاضلية

لاحظ أولا أن وحدة الدليل t هي لكل 20 سنة. أي بعد 60 سنة تكون t=3.

أ-

نفرض أن N(t) تمثل كمية العنصر المشع المتبقية عند الزمن t.

$$\because N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

$$\therefore N(3) = N(0)e^{-3\lambda}$$

$$\therefore N(3) = 165e^{-0.02(3)} = 155.3911\, gm.$$

ب-

$$\tau = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{0.02} = 34.6574\, years.$$

طالما أن الوحدة الزمنية لهذه المسألة 20 سنة، فهذا يعني بأن العمر النصفي لهذا العنصر هو حوالي 693= (34.6574)20 سنة.

ت-

$$\because 0.1N(0) = N(0)e^{-0.02t}$$

$$\therefore t = \frac{\ln(0.1)}{-0.02} = 115.1293\, years.$$

باستخدام المعادلات الفرقية (انظر الفصل الخامس)

نفرض أن x_n تمثل كمية العنصر المشع المتبقية بعد n من الفترات الزمنية التي أمد كل منها 20 سنة.

$$\because \Delta x_n = -0.02x_n$$
$$\therefore x_{n+1} - x_n = -0.02x_n$$

$$\therefore x_{n+1} = 0.98x_n.$$

وحل المعادلة الأخيرة هو:

$$x_n = 0.98^n x_0; n = 0,1,2,.....$$

أ- فإذا كانت الكمية الابتدائية من هذه العنصر هي $x_0 = 165$ غرام، فسوف يبقى من هذه الكمية بعد 60 سنة:

$$x_3 = 0.98(165) = 155.2967\, gm.$$

ب-

$$H \geq \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.98)} = 34.3096.$$

وطالما أن الوحدة الزمنية لهذه المسألة هي 20 سنة، فهذا يعني أن العمر النصفي لهذا العنصر هو حوالي 686= (34.3096)20 سنة.

ت-

$$\because x_n = 0.98^n x_0$$
$$\therefore 0.1x_0 = 0.98^n x_0$$
$$\therefore n = \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.98)} = 113.9741\, years.$$

والجدول الآتي يوضح مقارنة بين نتائج نمذجة هذه المسألة باستخدام كل من المعادلات التفاضلية (إذ عدّ الزمن كدليل مستمر) والمعادلات الفرقية (إذ عدّ الزمن كدليل متقطع).

الأداة الرياضية المستخدمة	الكمية المتبقية من العنصر بعد 60 سنة (غرام)	العمر النصفي (سنة)	العمر المقدّر للحيوان (سنة)
المعادلات التفاضلية	155.9311	693	115
المعادلات الفرقية	155.2967	686	114

نلاحظ من الجدول الأخير أن نتائج كل من المعادلات التفاضلية والمعادلات الفرقية متقاربة مع بعضها البعض، مما يتيح مرونة للمستفيدين باختيار الأداة الرياضية التي تناسبهم عند التطبيق.

المثال (13-7)

الشكل اللاحق يبين المنضدة المستديرة المثبّتة على الحائط في القاعة الكبرى لقلعة وينتشيستر في بريطانيا. قطر هذه المنضدة 18 إنجاً ولها 25 قطاعاً، أحدها للملك والأخرى لفرسانه. لقد اعتقد بَعْض الخبراء أن هذه المنضدة هي المنضدة الفعلية للملك آرثر، الذي عاش في القرن الخامس الميلادي، إلا أنه كان هناك شك بخصوص أصالتها. وفي السنة 1976 تم إنزال المنضدة من الحائط، وقام خبراء بتقدير عمر تلك المنضدة. وفي السنة 1977 تم حساب نسبة نضوب الكربون 14 فيها، وكانت $R(t) = 6.08$. فإذا علمت أن نسبة النضوب الإشعاعي للخشب الاعتيادي هي $R(0) = 6.68$ لكل دقيقة لكل غرام، تحقق من أصالة تلك المنضدة وعائديتها لعصر الملك آرثر.

الشكل (13-15) المنضدة المستديرة في قلعة وينتشيستر

الحل

من الجدول (13-2) نجد أن العمر النصفي للكربون 14 هو $\tau = 5730$. كذلك فإن R(0)=6.68 و R(1977)=6.06؛ لذا فإن:

$$k = \ln[\frac{R(t)}{R(0)}] = \ln[\frac{6.06}{6.68}] = \ln(0.9072) = -0.0974.$$

بالتعويض في العلاقة (13-32) نجد أن العمر التقريبي لهذه المنضدة هو:

$$t = -\frac{-0.0974(5730)}{(0.6931)} = 805 \ \ years.$$

أي إن العمر التقريبي لهذه المنضدة قرابة 805 سنة. أي إن التاريخ التقريبي لصناعة هذه المنضدة هو السنة: 1172=805-1977. أي إن صناعة المنضدة تعود إلى القرن الثاني عشر الميلادي. لذا فإن الادعاء بعائدية تلك المنضدة إلى عصر الملك آرثر هو ادعاء باطل، لأن هذا الملك عاش في القرن الخامس الميلادي.

التمارين

13-1 استخدم النموذج المقترح لنمذجة خطر حوادث السيارات جراء تناول المشروبات الروحية من خلال حساب نسب الكحول التي تؤدي نسبة خطورة 10% و 90%.

Ans. 0.1076, 0.2103.

13-9 في عيّنة متحجّرة كانت نسبة الكربون 14 إلى الكربون الطبيعي مقارنةً بالنسبة الطبيعية التي تساوي 25%، فكم يبلغ العمر التقريبي لهذا المتحجر؟

Ans. 11461 *years*.

13-10 في السنة 1950 وجدت لوحات فنية رائعة مرسومة بالفحم في الكهف المعروف في فرنسا بكهف Lascaux، وكانت نسبة النضوب فيها 0.97 بالدقيقة لكل غرام. فإذا علمت بان الخشب له نسبة نضوب 6.68 بالدقيقة لكل غرام. قدّر أعمار تلك اللوحات.

Ans. 15952 years.

13-11 الجدول الآتي يبين الإنتاج العالمي الفعلي للنفط خلال أربعة سنين.

الجدول (13-3) الإنتاج العالمي الفعلي للنفط للسنوات **1962–1966**.

السنة	الإنتاج (مليون طن)
1960	1091
1962	1259
1964	1458
1966	1693

وبفرض أن نسبة النمو في إنتاج النفط تتناسب مع كمية الإنتاج:

أ- استخدم المعادلات التفاضلية لبناء نموذجٍ رياضيٍّ لنمذجة الإنتاج العالمي الفعلي للنفط.

ب- استخدم النموذج الملاءَم للتنبؤ بالإنتاج العالمي للنفط للسنوات 1968 و 1970 و 1972.

12-13 الجدول الآتي يبين مقدار الاستهلاك اليومي للولايات المتحدة للنفط (ألف برميل).

الجدول (13-5) الاستهلاك اليومي للولايات المتحدة للنفط خلال السنوات **1946-1960**

السنة	الاستهلاك اليومي (ألف برميل)
1946	2015
1950	2724
1955	3655
1960	4130

أ- استخدم المعادلات التفاضلية لبناء نموذج رياضي لنمذجة النمو في الاستهلاك اليومي للولايات المتحدة للنفط.

ب- استخدم النموذج الملاءَم للتنبؤ بالاستهلاك اليومي للولايات المتحدة للنفط للسنتين 1965 و 1970.