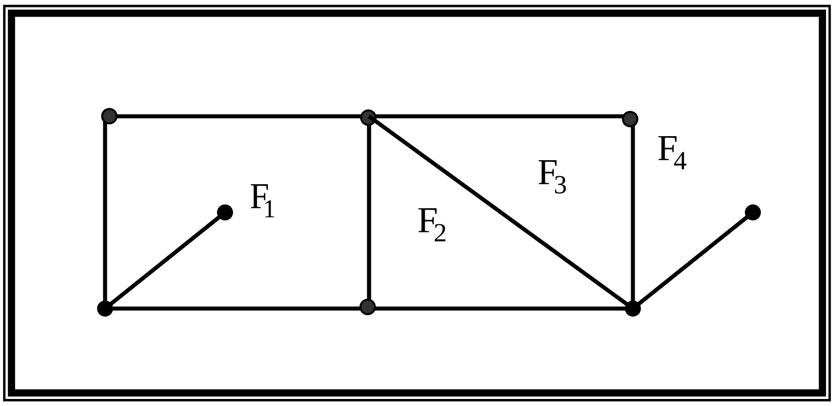
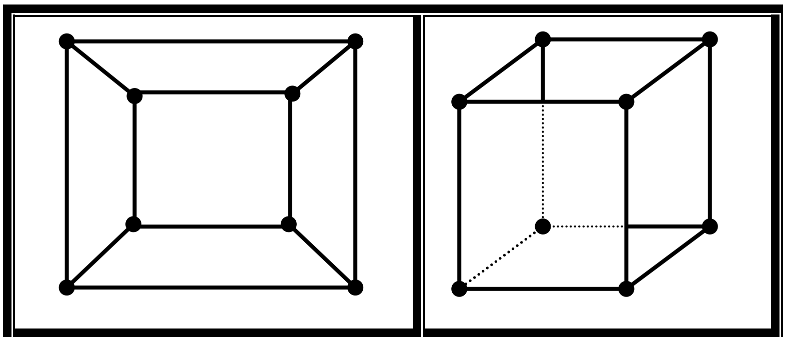
البيانات المستوية : (Planar Graphs)

عند غمر بيان ما في مستو سوف يتجزأ ذلك المستوي إلى مناطق ، يطلق على كل منها **وجه (face)** أو **منطقة (region)** لذلك البيان، وفي هذه التجزئة يطلق على المنطقة غير المحدودة بـ **الوجه الخارجي (the exterior face)** أو ما يسمى بـ **الوجه غير المحدود (unbounded face)**. ففي البيان المستوي المبين في الشكل $(1-10)$ ، لدينا أربعة أوجه وهي F_1, F_2, F_3, F_4 ، نلاحظ أن F_4 هو الوجه الخارجي أما بقية الأوجه فهي داخلية . ان حدود الوجه F_1 هو ليس دارة ، أما **تخوم (حدود)** كلا من الوجهين F_2 و F_3 هو دارة بسيطة ثلاثية.



الشكل $(1-10)$

لقد كان العالم أويلر أول من درس البيانات المستوية **(planar)** عندما كان يبحث في **متعددة السطوح (polyhedra)**، فقد لاحظ أن لكل متعددة سطوح يوجد بيان مرافق له ، رؤوسه هي رؤوس متعدد السطوح وحافاته هي أضلاعه ، ويطلق على بيان متعدد السطوح **هيكل-1 (1-skeleton)** ، فمثلا ، البيان في الشكل$(2-10)$ هو **هيكل -1 لبيان المكعب**.



هيكل – 1 لبيان المكعب	بيان المكعب

الشكل(10–2)

ومن هنا جاء استعمال أويلر لكلمة **وجه (face)**، ومن هذه الدراسة أوجد أويلر سنة 1736 الصيغة المعروفة ((**بصيغة أويلر لمتعدد السطوح**))، وهي واحدة من النتائج الكلاسيكية في الرياضيات، ويمكن صياغة تلك القاعدة للبيانات المستوية المتصلة في المبرهنة الآتية:

المبرهنة (1.10) : لكل بيان مستو متصل G، عدد رؤوسه p وعدد حافاته q وعدد أوجهه f، فأن $p - q + f = 2$.

البرهان: من الواضح أن الطرف الأيمن من صيغة المبرهنة (1.10) لا يتغير إذا أجرينا إحدى العمليتين:

(أ). إزالة رأس أحادي الدرجة مع الحافة الواقعة عليه.

(ب). إزالة حافة مشتركة بين تخمي وجهين مختلفين.

ففي حالة وجود رأس أحادي الدرجة ، فأن إزالة ذلك الرأس مع الحافة الواقعة عليه تنقص كلا من p و q بواحد ، وبذلك فأن المقدار $p - q + f$ لا يتغير. كما أن إزالة حافة

مشتركة بين تخمي وجهين مختلفين تنقص كلا من q و f بواحد ولا تتغير p ، وفي هذه الحالة أيضا $p-q+f$ لا يتغير.

فإذا بدأنا بأي بيان مستو متصل G وطبقنا عليه عمليات من النوعين (أ) و (ب) فسوف نتوصل إلى بيان G' يتكون من رأس واحد فقط وبدون حافات ، وذلك لأن G بيان منته. عندئذ يكون هنالك وجه واحد فقط في G' وهو الوجه الخارجي ، وعليه فأن صيغة المبرهنة (1.9) صحيحة للبيان G'، ولما كان الطرف الأيمن من هذه الصيغة لا يتغير عندما أجرينا العمليات من النوعين (أ) و (ب) ، فأن صيغة أويلر صحيحة للبيان G.

نتيجة (2.10) : إذا كان G بيانا مستويا متصلا عدد رؤوسه p وعدد حافته q وتخم كل وجه من أوجهه هو دارة بسيطة طولها ℓ، حيث أن $\ell \geq 3$، فأن

$$q=\frac{\ell(p-2)}{(\ell-2)}.$$

البرهان: بما أن تخم كل وجه في G هو دارة بسيطة طولها ℓ، وأن كل حافة تشترك بين تخمي وجهين مختلفين ، فأن $2q$ يساوي مجموع أطوال تخوم كل أوجه G، أي أن : $\ell f=2q$.

وباستعمال صيغة أويلر نحصل على $p-q+\frac{2q}{\ell}=2$. ومنها نحصل على:

$$q=\frac{\ell(p-2)}{(\ell-2)}.$$

يقال لبيان بسيط متصل مستو أنه **أعظمي (maximal)** إذا كانت عملية إضافة حافة بين رأسين غير متجاورين تحوله إلى بيان غير مستو، وبذلك فأن البيان المستوي يكون أعظميا ، إذا كان محتويا على أكبر عدد من الحافات ، لنفس مجموعة الرؤوس.

نتيجة 3.10: إذا كان G بيانا مستويا أعظميا عدد رؤوسه p وعدد حافاته q ، فأن $q = 3(p-2)$.

نتيجة 4.10: إذا كان G بيانا متصلا مستويا بسيطا عدد رؤوسه p وعدد حافاته q ، فأن $q \le 3p-6$.

نتيجة 5.10: برهن ان كلا من K_5 و $K_{3,3}$ غير مستوي .

البرهان: سوف نفرض أن K_5 بيانا مستويا .

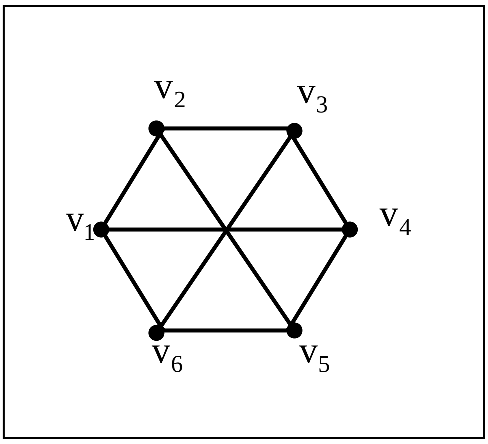
بما أن في البيان K_5 يكون $p=5$ و $q=10$، وعليه فأن $q = 10 > 9 = 3p-6$. وهذا يناقض النتيجة (3.10). أذا البيان K_5 غير مستويا.

الآن نفرض أيضا أن $K_{3,3}$ بيانا مستويا .

بما أن في البيان $K_{3,3}$ يكون $p=6$ و $q=9$، وطول كل دارة بسيطة لا يقل عن أربعة ، فأن $2q \ge 4f$ ، وأن $f=5$ حسب صيغة أويلر . ولكن هذا يؤدي إلى $2(9) \ge 4(5)$ وهذا غير صحيح ، أذا البيان $K_{3,3}$ غير مستويا. **انتهى البرهان**

تمارين :

1. برهن النتيجة (3.10).
2. برهن النتيجة (4.10).
3. هل أن البيان الموضح بالشكل(10-3) هو بيان مستوي أم لا ، ثم وضح ذلك بالرسم.



الشكل (10-3)

4. ما المقصود بالبيان المستوي الاعظمي ، وهل الشجرة تمثل مستوي أعضمي.
5. جدد عدد الأوجه للبيان بالشكل (10-3) إن أمكن.