المثال (6–2): (انتشار مرض معدٍ)

افرض أن هناك N من الأشخاص في محيط ما، ما لا يقل عن واحد من هؤلاء الأشخاص مصاب بمرض معدٍ (أنفلونزا الخنازير مثلا). وبفرض وجود تفاعل بين المصابين وغير المصابين لنَقْل المرض، وعدم وجود أي علاج. نمذج أعداد المصابين بهذا المرض بهذا المحيط بعد n من الأيام. ارسم الرسم الزمني لعدد المصابين بهذا المرض في ذلك المحيط خلال الأسبوعين القادمين عندما يكون N=100 و نسبة النمو r=0.005 وعدد المصابين بهذا المرض $x_0 = 3$.

الحل:

نفرض أن المتغير x_n يرمز إلى عدد المصابين بهذا المرض وبهذا المحيط بعد n من الأيام. من معطيات المثال، نجد أن:

(التغيير في أعداد المصابين بهذا المرض ليوم غد) **يتناسب مع** (عدد المصابين بهذا المرض لهذا اليوم) **و** (عدد غير المصابين بهذا المرض لهذا اليوم).

أي إن:

$$\Delta x_n \propto x_n(N - x_n).$$

إذ إن $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. وبعد تحويل علامة التناسب إلى معادلة، نجد أن:

$$x_{n+1} = x_n + r x_n(N - x_n);\ n = 0,1,2,.... \qquad (4\text{-}6)$$

والبرنامج الآتي، واسمه SpreadDisease، يقوم بحساب والرسم الزمني لعدد المصابين بهذا المرض من ذلك المحيط خلال الأسبوعين القادمين عندما يكون N=100 ونسبة النمو r=0.005 وعدد المصابين بهذا المرض $x_0 = 3$.

6–3 الأنظمة متعددة الأبعاد:

لنفرض الآن أننا نتعامل مع m من المتغيرات (أو ما يطلق عليه متغير ذو بُعد m- Dimensional m)، ولتكن هذه المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_m$. ولو فرضنا أن كل متغير من هذه المتغيرات مُنمذج بمعادلة فرقية من المرتبة الأولى وعلى النحو الآتي:

$$x_{1(n+1)} = c_{10} + c_{11}x_{1(n)} + c_{12}x_{2(n)} + ... + c_{1m}x_{m(n)},$$

$$x_{2(n+1)} = c_{20} + c_{21}x_{1(n)} + c_{22}x_{2(n)} + ... + c_{2m}x_{m(n)},$$

.

.

$$x_{i(n+1)} = c_{i0} + c_{i1}x_{1(n)} + c_{i2}x_{2(n)} + ... + c_{im}x_{m(n)},$$

.

.

$$x_{m(n+1)} = c_{m0} + c_{m1}x_{1(n)} + c_{m2}x_{2(n)} + ... + c_{mm}x_{m(n)}$$

إذ إن $c_{10}, c_{11}, ..., c_{mm}$ هي معاملات المعادلات الفرقية. ويطلق عادة على المعادلات السابقة تسمية نظام من المعادلات الفرقية System of Difference Equations. ويمكن اختصار المعادلات السابقة بمعادلة واحدة وعلى النحو الآتي:

$$x_{i(n+1)} = c_{i0} + c_{i1}x_{1(n)} + c_{i2}x_{2(n)} + ... + c_{im}x_{m(n)};\ i = 1,2,...,m \qquad (5\text{-}6)$$

لاحظ أنه وفق النموذج السابق فإن "القيمة اللاحقة" من كل متغير تعتمد على "القيمة الحالية" من المتغيرات الأخرى.

لتسهيل التعامل الرياضي مع نظام من المعادلات الفرقية السابق، يمكن بيسر تحويله إلى معادلة واحدة بدلالة مصفوفة Matrix ومتجهات Vectors وعلى النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} x_{1(n+1)} \\ x_{2(n+1)} \\ . \\ . \\ . \\ x_{i(n+1)} \\ . \\ . \\ . \\ x_{m(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & . & c_{1i} & . & . & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & . & c_{2i} & . & . & c_{2m} \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ c_{i1} & c_{i2} & . & c_{ii} & . & . & c_{im} \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & . & c_{mi} & . & . & c_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1(n)} \\ x_{2(n)} \\ . \\ . \\ . \\ x_{i(n)} \\ . \\ . \\ . \\ x_{m(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \\ . \\ . \\ . \\ c_{i0} \\ . \\ . \\ . \\ c_{m0} \end{pmatrix}.$$

أو

$$\underline{x}_{n+1} = C_1 \underline{x}_n + C_0;\ n = 0,1,2,... \qquad (6\text{-}6)$$

إذ إن:

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & . & c_{1i} & . & . & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & . & c_{2i} & . & . & c_{2m} \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ c_{i1} & c_{i2} & . & c_{ii} & . & . & c_{im} \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & . & c_{mi} & . & . & c_{mm} \end{pmatrix} \quad \underline{x}_{n+1}=\begin{pmatrix} x_{1(n+1)} \\ x_{2(n+1)} \\ . \\ . \\ . \\ x_{i(n+1)} \\ . \\ . \\ . \\ x_{m(n+1)} \end{pmatrix}$$

$$C_0=\begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \\ . \\ . \\ . \\ c_{i0} \\ . \\ . \\ . \\ c_{m0} \end{pmatrix}.$$

حل المعادلة الفرقية:

يمكن بيسر حل المعادلة الفرقية (6-6) بطريقة مماثلة لتلك في حال المتغير الواحد، انظر الفصل الخامس:

$$\underline{x}_1 = C_1\underline{x}_0 + C_0\,;$$
$$\underline{x}_2 = C_1\underline{x}_1 + C_0 = C_1(C_1\underline{x}_0 + C_0) + C_0$$
$$= C_1^2\underline{x}_0 + C_0 + C_1C_0.$$

وبتكرار هذه العملية نحصل على ما يأتي:

$$\underline{x}_n = C_1^n\underline{x}_0 + C_0 + C_1C_0 + \ldots + C_1^{n-1}C_0.$$

أي إن حل المعادلة الفرقية (6-6) هو :

$$\underline{x}_n = C_1^n\underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} C_1^iC_0;\ n = 0,1,2,\ldots \qquad (7\text{-}6)$$

ملاحظة:

يمكن التأكد من أن:

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_1^i = (I - C_1^n)(I - C_1)^{-1};\ |I - C_1| \neq \underline{0}. \qquad (8\text{-}6)$$

إذ إن I هي المصفوفة الأحادية Identity Matrix ، عناصر قطرها الرئيس 1 وباقي العناصر أصفار، وأن $\underline{0}$ متجه صفري، جميع عناصره أصفار.

المتجه الثابت Fixed Vector:

يمكن تطوير مفهوم النقطة سالثابتة، والذي ذكرناه في الفصل السابق عند تعاملنا مع متغير واحد، الى المتجه الثابت والذي يتضمن المفهوم نفسه عند التعامل مع متغيرات متعددة. لنفرض أن $\underline{x} = \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n$ يمثل المتجه الثابت للنظام (6-6). وبأخذ غاية المعادلة (6-6)، نجد أن:

$$\underline{x} = C_1 \underline{x} + C_0$$

لذا نجد أن:

$$\underline{x}(I - C_1) = C_0$$

أي إن:

$$\underline{x} = (I - C_1)^{-1} C_0 ; \left| I - C_1 \right| \neq 0, \qquad (9\text{-}6)$$

إذ إن |...| يرمز إلى المحدد Determinate. ويمكن البرهنة على أن المتجه الثابت يكون وحيدا إذا وفقط إذا كان $\left|I - C_1\right| \neq 0$.

المثال (6–3):

إذا كانت x_n و y_n و z_n ثلاثة متغيرات مترابطة فيما بينها وفق النظام الآتي:

$$x_{n+1} = 1.5 + 0.3x_n + 0.6y_n + 0.2z_n ,$$
$$y_{n+1} = 2.3 + 0.5x_n + 0.2y_n + 0.7z_n ,$$
$$z_{n+1} = 0.8 + 0.2x_n + 0.2y_n + 0.1z_n ,$$
$$x_0 = 3,\ y_0 = 5,\ z_0 = 2.$$

أ– مثّل هذا النظام بطريقة المصفوفات.

ب– جد المتجه الثابت.

الحل:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.5. \\ 2.3 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

وهذه المعادلة تكافئ المعادلة العامة (6-6):

$$\underline{x}_{n+1} = C_1 \underline{x}_n + C_0 ;\ n = 0,1,2,...$$