المحاضرة العاشرة

قابلية القسمة على 13,11, 9, 7, 5, 3, 2

من التطبيقات المهمة للتطابقات، ايجاد قواعد تبين ما إذا كان عدد صحيح يقبل القسمة على عدد صحيح اخر. وتعتمد تلك القواعد على تحديد العلاقة بين ارقام المقسوم المعبر عنها بالنظام العشري او اي نظام اخر والمقسوم عليه.

مبرهنة (23):

إذا كان $f(x)=\sum_{i=0}^{m} c_i x^i \ , c_i \in \mathbb{Z}$ وكان $a \equiv b \pmod n$ ، فإن $f(a) \equiv f(b) \pmod n$.

تعريف:

يقال عن $x=a$ أنه حل لكثيرة الحدود $f(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^i \equiv 0 \pmod n$ $c_i \in \mathbb{Z}$ إذا كان $f(a) \equiv 0 \pmod n$.

امثلة:

لتكن $f(x)=3x^2+2x-5$ ، $11 \equiv 3 \pmod 8$. إذاً $f(11)=3(11)^2+2(11)-5=380$ ، $f(3)=3(9)+2(3)-5=28$ و $380 \equiv 28 \pmod 8$. وعليه فإن $f(11) \equiv f(3) \pmod 8$. وإذا كان $f(x) \equiv 0 \pmod 8$ ، فإن $x=1,5$ ، لأن $f(1)=0 \equiv 0 \pmod 8$ ، $f(5)=80 \equiv 0 \pmod 8$.

مبرهنة (24): قابلية القسمة على 2, 3, 5, 9, 11

اذا كان $a=(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10}$ وكان $s=\sum_{i=0}^{n} a_i$ ، $t=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i$ فان

(أ) $2 \setminus a \Leftrightarrow 2 \setminus a_0$ ، (ب) $5 \setminus a \Leftrightarrow 5 \setminus a_0$،

(ج) $3 \setminus a \Leftrightarrow 3 \setminus s$، (د) $9 \setminus a \Leftrightarrow 9 \setminus s$،

(هـ) $11 \setminus a \Leftrightarrow 11 \setminus t$.

امثلـة: أثبت أن:

(أ) 147381 يقبل القسمة على 3 ، (ب) 2358792 يقبل القسمة على 9 .

(ج) 61457 يقبل القسمة على 11 .

الاثبات:

(ا) بما أن s=1+8+3+7+4+1=24 و 3/24. إذا 147381 يقبل لقسمة على 3.

(ب) بمـــــــــــــا أن $s = 2+9+7+8+5+3+2 = 36$ و $9 \setminus 36$. إذاً 2358792 يقبل القسمة على 9 .

(ج) بما أن

$$t = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4$$

t=7-5+4-1+6=11

إذا 61457 يقبل القسمة على 11.

مثال:

أثبت أن 874326 يقبل القسمة على 2 و 3 لكنه لا يقبل القسمة على 9 .

الاثبات:

ليكن a=874326، $a_0 = 6$ و 6 تقبل القسمة على 2 ، اذا a يقبل القسمة على 2 وحسب مبرهنة (17(أ))، وحيث أن

s=6+2+3+4+7+8=30

$s \setminus 3$, ولكن $s \nmid 9$. اذاً $a \setminus 3$، بينما $a \nmid 9$ وحسب مبرهنة (18(جـ، د)).

مثال:

اختبر قابليّة قسمة العدد N = 894325734 على كل من 9 و 11 .

الحل:

بما أن : S = 4 + 3 + 7 + 5 + 2 + 3 + 4 + 9 + 8 = 45 يقبل القسمة على 9 فإن N يقبل القسمة على 9 . وبما أن T = 4-3 + 7 - 5 + 2 - 3 + 4 - 9 + 8 = 5 لايقبل القسمة على 11 فإن العدد N لا يقبل القسمة على 11. □

مبرهنة (25): قابلية القسمة على 7، 13

اذا كان $a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10}$، و

$$b = \frac{a - a_0}{10} = a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \cdots + a_1$$

فأن

(أ) $7 \setminus a \Leftrightarrow 7 \setminus (b - 2a_0)$،

(ب) $13 \setminus a \Leftrightarrow 13 \setminus (b - 9a_0)$.

مثال: (أ) أثبت أن $153279 \setminus 7$ بينما $65435 \nmid 7$.

(ب) أثبت أن $104741 \setminus 13$

الحل:

(أ) بما أن $7 \setminus a \Leftrightarrow 7 \setminus (b - 2a_0)$، اذا

$$7 \setminus 153279 \Leftrightarrow 7 \setminus (15327 - 18) \Leftrightarrow 7 \setminus 15309 \Leftrightarrow 7 \setminus (1530 - 18)$$
$$\Leftrightarrow 7 \setminus 1512 \Leftrightarrow 7 \setminus (151 - 4) \Leftrightarrow 7 \setminus 147 \Leftrightarrow 7 \setminus (14 - 14) \Leftrightarrow 7 \setminus 0$$

إذاً $7 \setminus 153279$.

بما أن $7 \setminus 65435 \Leftrightarrow 7 \setminus (6543 - 10) \Leftrightarrow 7 \setminus 6533 \Leftrightarrow 7 \setminus (653 - 6)$
$$\Leftrightarrow 7 \setminus 647 \Leftrightarrow 7 \setminus (64 - 14) \Leftrightarrow 7 \setminus 50 \Leftrightarrow 7 \setminus 5$$

و $7 \nmid 5$. إذاً $7 \nmid 65435$

(ب)بما أن $13 \setminus a \Leftrightarrow 13 \setminus (b - 9a_0)$

$$13 \setminus 104741 \Leftrightarrow 13 \setminus (10474 - 9) \Leftrightarrow 13 \setminus 10465 \Leftrightarrow 13 \setminus (1046 - 45)$$
$$\Leftrightarrow 13 \setminus 1001 \Leftrightarrow 13 \setminus (100 - 9) \Leftrightarrow 13 \setminus 91 \Leftrightarrow 13 \setminus 0$$

وعليه فإن 104741 يقبل القسمة على 13 .
