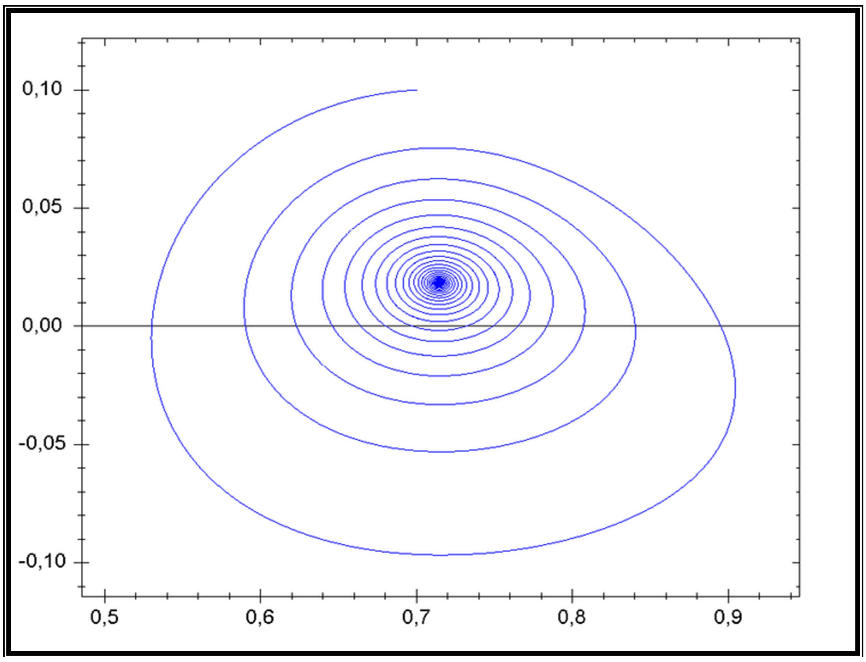
النظم الحركية Dynamical Systems

يعد مفهوم **النظم الحركية (الديناميكية)** من المفاهيم المهمة في الرياضيات التطبيقية والعديد من المواضيع ذات العلاقة. عموما فإن النظام الحركي في التطبيقات الواقعية يتألف عادةً من مجموعة من الحالات States الممكنة إضافة إلى قاعدة رياضية ثابتة Fixed Rule لإيجاد "الحالة الحالية" بدلالة "حالات سابقة"، وهذه القاعدة الثابتة تصف اعتمادية نقطة في فضاء هندسي على الزمن. ومن الأمثلة على النظم الحركية، النماذج الرياضية التي تَصِف تَأَرجُح بندول (رقاص) ساعة، وتدفق الماء في أنبوب، وعدد الأسماك كُلّ موسم ربيع في بيئة مائية معينة، ولتكن بحيرة سد الموصل.

إن **فضاء الطور Phase Space** في الرياضيات والفيزياء هو الفضاء الذي تُمَثّل فيه جميع الحالات الممكنة للنظام، مع أن كل حالة ممكنة في النظام تقابل نقطة وحيدة في فضاء الطور. والشكل الآتي يوضح فضاء طور لنظام حركي ذي استقرارية بؤرية.



الشكل (1) فضاء طور لنظام حركي ذو استقرارية بؤرية

تعود الجذور التاريخية لمفهوم النظم الحركية إلى ميكانيك نيوتن. وهناك علوم طبيعة ومسائل هندسية، يُعطى تطور القاعدة الثابتة للنُظم الحركية فيها ضمنياً مِن قِبل علاقة معينة. إذ إن العلاقة إما أن تكون معادلة تفاضلية Differential Equation، أو معادلة فرقية Difference Equation أَو مقياس زمني آخر. إن تحديد "الحالة" لجميع الأزمنة المستقبلية يتطلّب تكرار العلاقة مرات عديد Iterating. إنّ إجراء التكرار يشار إليه باسم حَلّ النظام. وعندما يُمْكِن للنظام أَنْ يُحل، وعند إعطاء نقطة ابتدائية Initial Point، فمن الممكن إيجاد جميع المواقع المستقبلية، وهي عبارة عن حشد من النقاط المعروفة باسم **المسار Trajectory** أَو **المدار Orbit**.

إن النظام الحركي في أيّ زمن يكون في حالة State تُعطى من مجموعة الأعداد الحقيقية التي يُمكن أَن تُمثّل مِن قِبل نقطة في فضاء حالة State Space ملائم. إن المقصود **بحالة النظام هي المعلومات اللازمة لكي يمكن تطبيق القاعدة الثابتة**. إنّ قاعدة تطور النظام الحركي هي القاعدة الثابتة والتي تصِف أي الحالات المستقبلية سوف تلي الحالة الحالية. إنّ القاعدة الثابتة هي قاعدة حتمية Deterministic، بمعنى انه عند أي زمن مُعطى فهناك حالة مستقبلية واحدة فقط سوف تجيء من الحالة الحالية. مما تقدم يتضح لنا بان النظام الحركي يتألف من مجموعة من الحالات الممكنة، مع قاعدة تقوم بإيجاد "الحالة الحالية" من "الحالة السابقة".

المثال (1)

نفرض أن الدالة:

$$f(x) = 2x \qquad (1)$$

هي القاعدة الرياضية الثابتة التي تُخصِص لكل عدد x، عدداً يعادل ضعفه. وكما هو واضح فان الدالة المعرّفة في المعادلة (1) هي نموذج رياضي سهل. فلو فرضنا أن المتغير x يمثل حجم مجتمع بكتريا في مُستنبت مختبري Laboratory Culture، وأن $f(x)$ تمثل حجم مجتمع البكتريا في هذا المُستنبت بعد ساعة، وكما هو معروف فإن البكتريا تتكاثر بالانشطار، إذ تصبح الخلية الواحدة خليتان بعد مدة زمنية معينة. لذا فإن هذه القاعدة الثابتة تُظهر الحقيقة التي مفادها بان حجم مجتمع البكتريا يتضاعف كل ساعة. فلو كان حجم المُستنبت الابتدائي 10000 خلية بكتريا، فانه بعد ساعة سيكون $f(10000) = 2(10000) = 20000$ بكتريا، وبعد ساعتين سيكون $f(f(10000)) = 2(2 \times 10000) = 40000$ خلية بكتريا،...الخ.

إن القاعدة الرياضية f(x)=2x تُمَكننا من إيجاد "الحالة الحالية" x_n بدلالة "الحالة السابقة" x_{n-1} ، إذ إن x_n يمثل حجم مجتمع البكتريا في الزمن n. ويمكن بيسر تحويل هذه القاعدة الرياضية إلى نظام حركي وعلى النحو الآتي:

أ- طالما أن مُنطلَق النظام الحركي ومداه متماثلان فإننا نضع x=f(x).

ب- نُدلّل الطرف الأيسر من العلاقة الأخيرة ، x=f(x)، بدلالة "الزمن الحالي" n، فيصبح x_n، ونُدلّل الطرف الأيسر منها بدلالة الزمن السابق n-1، فيصبح $f(x_{n-1})$.

ت- فيكون لدينا النظام الحركي الآتي المعبّر عن تكاثر البكتريا:

$$x_n = f(x_{n-1}) = 2x_{n-1};\ n = 1,2,3,.... \qquad (2)$$

هنا الدليل n يمثل الزمن، و x_n يمثل حجم مجتمع البكتريا عند الزمن n. وكما هو واضح فان القاعدة هنا هي حتمية، بمعنى أنه يمكننا إيجاد الحجم الحالي لمجتمع البكتريا بوحدانية من حجمه قبل ساعة.

ملاحظة

1- نشير إلى أن الدليل n غالبا ما يمثل الزمن، وهو دائما يأخذ قيماً متقطعة مع النظم الحركية المتقطعة، وبحيث يغطي جميع القيم الممكنة من المتغير: $x_0, x_1, x_2, ...$.

2- يمكن كتابة النموذج (1) بالشكل المكافئ الآتي:

$$x_{n+1} = f(x_n) = 2x_n;\ n = 0,1,2,3,....$$

تصنيف النظم الحركية

يمكن تصنيف النظم الحركية من زوايا مختلفة:

1- من حيث الحتمية: إذ تُصنف النظم الحركية إلى:

أ- نظم حركية حتمية Deterministic Dynamical Systems: إذ لا يُسمح لأي تأثير عشوائي على النظام الحركي.

ب- نظم حركية غير حتمية (تصادفية Stochastic) Deterministic Dynamical Systems: إذ يُسمح بوجود تأثيرات عشوائية على النظام الحركي.

2- **من حيث الزمن:** إذ تصنف النظم الحركية إلى:

أ- نظم حركية ذات زمن متقطع Discrete-Time Dynamical Systems (أو اختصارا نظم حركية متقطعة)، إذا كانت القاعدة الثابتة تُطبق عند أزمنة منفصلة (متقطعة). في النظم الحركية المتقطعة فإن "الحالة الحالية" تكون مُدخلا Input يقوم بتحديث وضعية النظام من خلال إنتاج حالة جديدة كمُخرج Output. ونشير إلى أن تعاملنا في هذا الكتاب سيكون مقتصرا على لنظم الحركية المتقطعة.

ب- نظم حركية ذات زمن مستمر Continuous-Time Dynamical Systems (أو اختصارا نظم حركية مستمرة)، إذا كانت القاعدة الثابتة تُطبق عند أزمنة متصلة (مستمرة).

3- من حيث طبيعة العلاقة

أ- نظم حركية خطية Linear Dynamical Systems: وهي النُظم التي يمكن حلها بدلالة دوال رياضية سهلة، وان سلوك جميع المدارات يمكن تصنيفه. ويمكن التحقق من كون النظام الحركي خطيا أم لا وذلك باختبار **مبدأ التراكب Superposition Principle**، الذي ينص على أن "**أية تركيبة خطية لحلول معادلة تفاضلية/ فرقية متجانسة، يكون لها حلٌّ كذلك**". فلو كان u_n و v_n يحققان المعادلة التفاضلية/ الفرقية المتجانسة، وكان أيضا $y_n = u_n + v_n$ يحققها، فعندئذ فقط يتحقق مبدأ التراكب. رياضيا، إذا كانت $y = f(x)$ ، وكان:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v), \qquad (3)$$

لأي ثابتين α و β، فعندئذ يتحقق مبدأ التراكب.

ب- نظم حركية لا خطية Linear Dynamical Systems: إن النظم الحركية اللا خطية لا تحقق مبدأ التراكب، ويمكنها أن تُظهر سلوكا متقلّبا جداً، والذي يبدو كأنه سلوك عشوائي (نذكّر القارئ الكريم بأننا نتكلم عن أنظمة حتمية وليست عشوائية). وهذا السلوك المتقلّب يدعى الهَباء أو الفوضى Chaos، انظر الفصل القادم.

المثال (2)

تحقق فيما إذا كان النظام الحركي المتقطع:

$x_{n+1} = bx_n ; n = 0,1,2,....$

خطيا أم لا.

الحل

لو كتبنا $x_{n+1} = f(x_n)$ ، فان $f(x) = bx$. للتحقق من مبدأ التراكب، نجد أن:

$$f(\alpha u + \beta v) = b(\alpha u + \beta v) \quad \text{(i)}$$

كذلك

$$\alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha(bu) + \beta(bv)$$

أي إن

$$\alpha f(u) + \beta f(v) = b(\alpha u + \beta v). \quad \text{(ii)}$$

ونلاحظ أن (ii)=(i)؛ لهذا فإن مبدأ التراكب يتحقق لأي ثابتين α و β، وبذلك يكون هذا النظام الحركي خطيا.

تكرارات الدوال Iterates of Functions

لنفرض أننا أدخلنا العدد 0.5 إلى الحاسبة الشخصية، ثم قمنا بالضغط على المفتاح x^2 ، الذي يقوم بالتربيع، على نحو متكرر، فإننا بالتأكيد سنجد أن العدد الظاهر على الشاشة سيكون المتتالية الآتية:

X={0.5, 0.25, 0.0625, 0.00390625, 0.0000152858,…..}

ولو فرضنا أن $f(x) = x^2$ ، وان $x_0 = 0.5$ ، فإن المتتالية X يمكن كتابتها على النحو الآتي:

X={ $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), f(f(f(f(x_0)))),...$ }.

إن الأعداد التي تظهر ضمن عناصر المتتالية الأخيرة تسمى **تكرارات العدد** x_0 **بالنسبة للدالة f** **Iterates of** x_0 **for f**.

التعريف (1)

إذا كانت النقطة x_0 تقع ضمن مُنطلَق (مجال) Domain الدالة f، فإن:

$f^{[1]}(x_0)=f(x_0)$ يسمى التكرار الأول للعدد x_0 بالنسبة للدالة f.

$f^{[2]}(x_0)=f(f(x_0))$ يسمى التكرار الثاني للعدد x_0 بالنسبة للدالة f.

$f^{[3]}(x_0)=f(f(f(x_0)))$ يسمى التكرار الثالث للعدد x_0 بالنسبة للدالة f

وبشكل عام فإن:

$f^{[n]}(x_0)=f(f(...f(x_0)...))$ يسمى التكرار n للعدد x_0 بالنسبة للدالة f.

ملاحظة

$$f^{[0]}(x_0)=x_0.$$

المدارات Orbit:

المدار مصطلحٌ في علم الفلك، ويستخدم أيضا مع النظم الحركية، ويُعرّف على النحو الآتي.

التعريف (2)

إن المتتالية $\{f^{[n]}(x_0)\}_{n=0}^{\infty}=\{x_0,f(x_0),f^{[2]}(x_0),...\}$ تسمى **مدار Orbit** النقطة x_0 بالنسبة للدالة f.

المثال (3)

جد مدار النقطة $x_0=-0.5$ بالنسبة للدالة $f(x)=x^2+1$.

الحل

يمكن حل هذا المثال يدويا وكما مبين في الجدول الآتي:

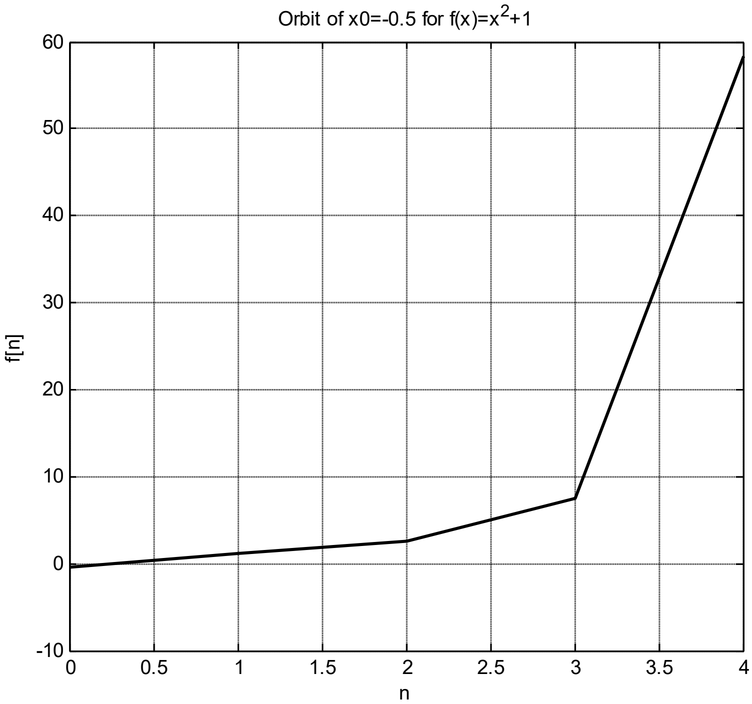
n	0	1	2	3	4	…
$f^{[n]}(x_0)$	-0.5	1.2500	2.5625	7.5664	58.2505	…

كما يمكن حله حاسوبيا بوساطة البرنامج الآتي، واسمه **Orbit**:

```
clear
clc
x0=-0.5;
x(1)=x0;
n=0:4;
for i=2:length(n)
 x(i)=x(i-1)^2+1;
end
disp('      n       f[n]')
disp([n' x'])
plot(n,x)
title('Orbit of x0=-0.5 for f(x)=x^2+1')
xlabel('n')
ylabel('f[n]')
grid on
```

ونتائج الحاسوب هي:

n	f[n]
0	-0.5000
1.0000	1.2500
2.0000	2.5625
3.0000	7.5664
4.0000	58.2505



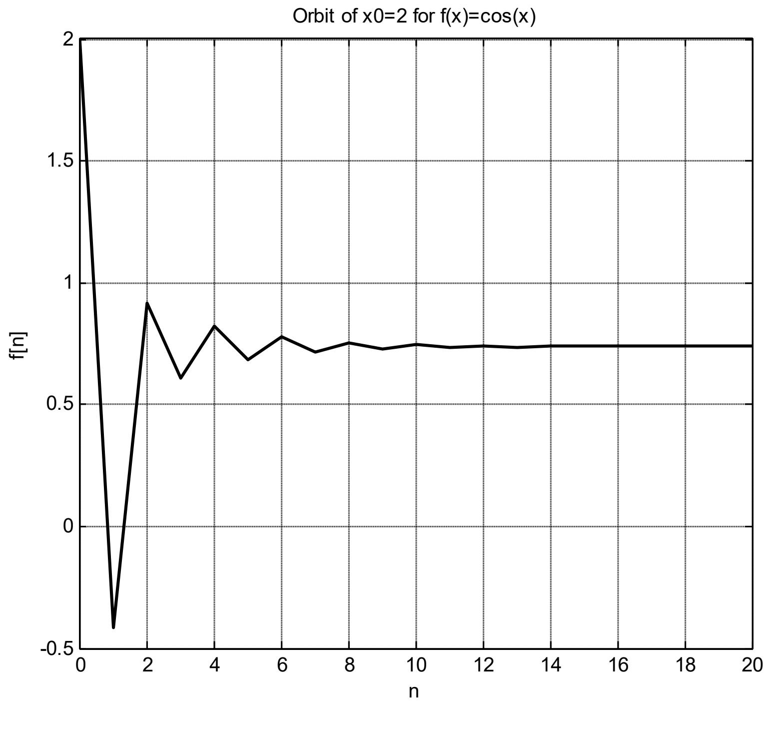
المثال (4)

جد مدار النقطة $x_0 = 2$ بالنسبة للدالة $f(x) = \cos(x)$.

الحل

بعد إدخال المعلومات اللازمة إلى البرنامج الأخير نحصل على النتائج الآتية:

n	f[n]
0	2.0000
1.0000	-0.4161
2.0000	0.9147
3.0000	0.6101
4.0000	0.8196
5.0000	0.6825
6.0000	0.7760
7.0000	0.7137
8.0000	0.7559
9.0000	0.7276
10.0000	0.7467



وكما هو واضح فإن $f^{[n]}(x_0)$ تقترب من 0.7391 كلما ازدادت قيمة n.