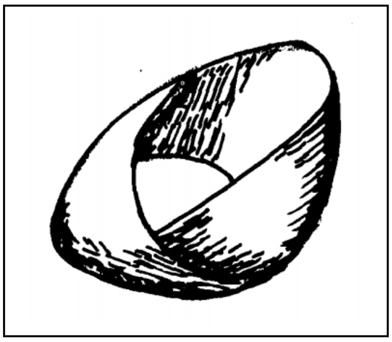
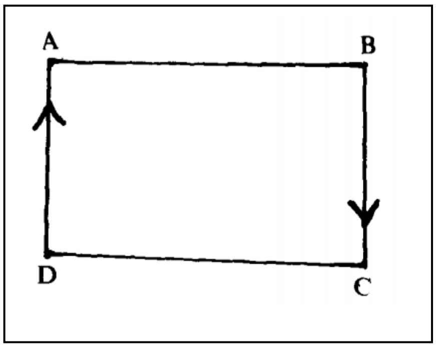
السطوح المغلقة الموجهة : (The Oriented Closed Surfaces)

السطح الكروي هو سطح مغلق ، وكذلك سطح الطرة، أما المستوي فهو سطح مفتوح، وكذلك شريط موبيس (Mobius Strip) المبين في الشكل (1−11)، لاحظ أنـه يمكن تكوين شـريط مـوبيس مـن تطـابق ضـلعين متقـابلين لمسـتطيل (مـن الـورق مـثلا) بحيـث يتطـابق السهمان بعضهما على بعض ، لاحظ الشكل (2−11) ، أي تنطبق النقطة A على النقطة C، وتنطبق النقطة D على النقطة B.



الشكل (1−11)

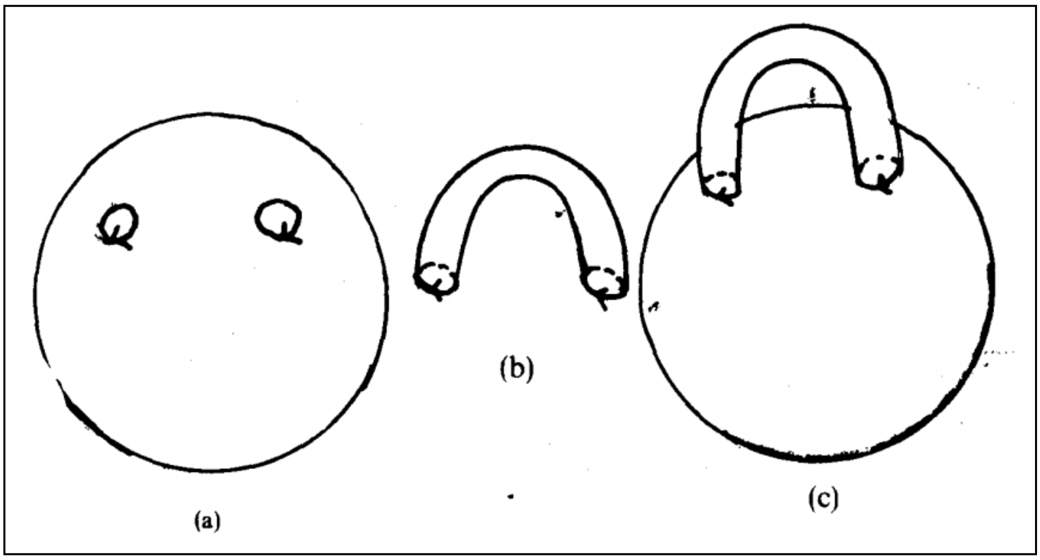


الشكل (2−11)

ليكن S سطحاً . ولنفرض اننا رسمنا حول كل نقطة على S (ماعدا النقاط الواقعة على تخمه . . إن وجدت) منحنياً بسيطاً مغلقاً صغيراً وعيّنا له اتجاهاً محدداً (اما باتجاه حركة عقرب الساعة او بالاتجاه المعاكس) . عندئذ . يقال ان S موجه أو قابل للتوجيه (orientable) اذا امكن اختيار الاتجاهات لهذه المنحنيات المغلقة بحيث ان لكل النقاط على S القريبة قرباً كافياً عن بعضها يكون لمنحنياتها نفس الاتجاه . فمثلاً . السطح الكروي هو سطح موجه . وكذلك الطرة . اما شريط موبيس فهو سطح غير موجه .

مما تقدم نستنتج ان الكرة والطرة سطحان موجهان مغلقان .

والان نبين بطريقة صورية كيفية الحصول على سطوح مغلقة موجهة اخرى . وذلك بربط مقابض (handles) بالسطح الكروي . نأخذ على سطح الكرة قرصين دائريين مغلقين منفصلين ونعين لتخميهما نفس الاتجاه (مثلاً . باتجاه حركة عقرب الساعة) . ومن ثم نرفع مابداخلهما فيتكون لدينا ثقبان على السطح الكروي لهما تخمان موجهان بنفس الاتجاه . كما هو مبين في (a) من الشكل (3-11) .
بعد ذلك نأخذ اسطوانة منحنية [كالتي في (b) من الشكل (3-11)] ونثبت على طرفيها الاتجاه نفسه الذي عين لتخمي الثقبين . واخيراً . نربط طرفي الاسطوانة بالثقبين الموجودين على سطح الكرة بحيث ينطبق طرفي الاسطوانة على تخمي الثقبين مع المحافظة على الاتجاه نفسه . كما هو مبين في (c) من الشكل (3-11)
السطح الناتج هذا هو سطح كرة مع مقبض واحد .



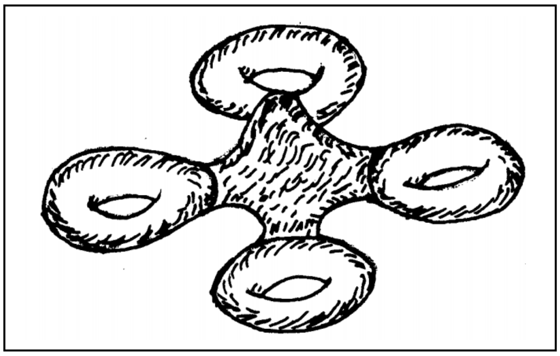
الشكل (3-11)

يمكن اعادة هذه العملية على السطح الناتج وذلك بربط مقبض ثانٍ به . فيتكون لدينا سطح كروي مربوط به مقبضان . وهكذا ، بتكرار هذه العملية h من المرات نحصل على كرة مربوط بها h من المقابض .

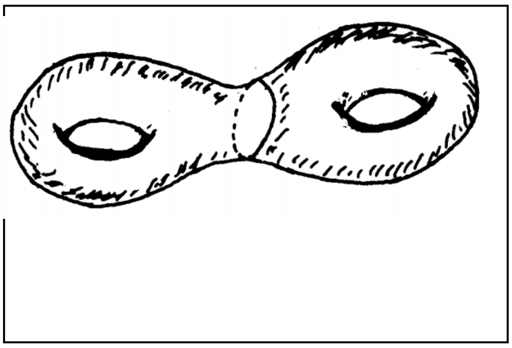
المبرهنة (1.11) : كل سطح مغلق موجه يمكن الحصول عليه من السطح الكروي بربط عدد معين من المقابض بالطريقة التي ذكرت فيما تقدم.

الجنس (Genus) :

، يعرف جنس (genus) السطح المغلق الموجه S بانه عدد المقابض التي تربط بسطح كروي للحصول على S . فمثلاً ، السطح الكروي هو سطح جنسه صفر، والطرة هي سطح جنسه 1 ، والطرة المزدوجة (double torus) المبينة في الشكل (4-11) هي سطح جنسه 2 ، والسطح المبين في الشكل (5-11) هو سطح موجه جنسه 4



الشكل (11-5)



الشكل (11-4)

لقد لاحظنا في المحاضرة السابقة انه يمكن غمر اي بيان في الفضاء الاقليدي الثلاثي الابعاد ، R^3 . وان كل بيان مستوٍ يمكن غمره في سطح كروي . ولقد لاحظ كونيك (Konig) أن كل بيان يمكن غمره في سطح قابل للتوجيه . ويمكن اثبات صحة ذلك بسهولة . فاذا كان G بياناً مرسوماً على سطح كروي ، وكان هنالك تقاطع بين حافتين e_1 و e_2 . فعندئذ يمكننا ربط مقبض بالسطح الكروي . ورسم e_1 على سطح المقبض وابقاء e_2 مرسوماً على السطح الكروي ماراً تحت المقبض . وهكذا يمكن ربط السطح الكروي بمقابض لايزيد عددها على عدد التقاطعات بين الحافات . وهكذا يمكن غمر G في سطح مغلق موجه جنسه h لا يزيد على عدد التقاطعات بين الحافات .

من الطبيعي ان نسأل عن أقل عدد h بحيث يمكن غمر البيان في سطح موجه جنسه h . ولاجل ذلك نعرف جنس البيان G على النحو الآتي : اذا امكن غمر البيان G في سطح موجه جنسه g ولايمكن غمره في سطح جنسه g -1 . فيقال ان جنس البيان G هو g . واضح انه اذا امكن غمر البيان في سطح جنسه g . فيمكن غمره ايضاً في سطح جنسه $g + k$ ، $1 \leq k$ اما العكس فغير صحيح .

يرمز لجنس البيان G بالرمز g (G) . واضح أن g (G) = 0 اذا واذا فقط G بيان مستوٍ . كما ان البيانات المتكافئة توبولوجياً لها نفس الجنس . وان جنس اي بيان لايزيد على عدد التقاطع

يمكن تعميم صيغة أويلر لبيانات ذات جنس g . كما هو مبين في المبرهنة الآتية التي تعود الى أويلر .

المبرهنة (2.11): إذا كان G بيانا متصلا جنسه g ، وعدد رؤوسه n وعدد حافاته m وعدد أوجهه f ، فأن $n-m+f=2(1-g)$.

من المبرهنة (2.11) نحصل على النتائج الآتية :

نتيجة (3.11): ليكن G بيانا متصلا، وعدد رؤوسه n وعدد حافاته m جنسه g ، عندئذ:

(أ). إذا كان كل وجه في G مثلثا ، فأن $m=3(n-2+2g)$.

(أ). إذا كان كل وجه في Gشكلا رباعيا ، فأن $m=2(n-2+2g)$.

البرهان : واجب

نتيجة (4.11): ليكن G بيانا بسيطا متصلا، وعدد رؤوسه n وعدد حافاته m جنسه g ،

فأن: $g(G)\geq\frac{1}{6}m-\frac{1}{2}n+1$.

وإذا لم يحتوي البيان G على مثلثات ، فأن $g(G)\geq\frac{1}{4}m-\frac{1}{2}n+1$.

البرهان : واجب

ملاحظة : يمثل $[x]$ على أنه أكبر عدد صحيح لا يزيد على x ، وأن $\{x\}$ يمثل أصغر عدد صحيح لا يقل عن x.

مبرهنة (5.11) : كل عدد صحيح موجب n ، $n \ge 3$، يكون :

$$g(K_n) = \left\{ \frac{1}{12}(n-3)(n-4) \right\}.$$

مبرهنة(6.11): لكل بيان ثنائي التجزئة تام $K_{n,m}$، $n,m \ge 2$، يكون :

$$g(K_{n,m}) = \left\{ \frac{1}{4}(n-2)(m-2) \right\}.$$

<u>تمارين :</u>

1. **جد جنس البيان التام من الرتبة 6، وبيان العجلة من الرتبة 10.**
2. **برهن النتيجة (3.11).**
3. **برهن النتيجة (4.11).**
4. **عرف الجنس ، وأعط مثالا لبيان جنسه هو 1.**
5. **ما المقصود بالسطح المغلق الموجه.**