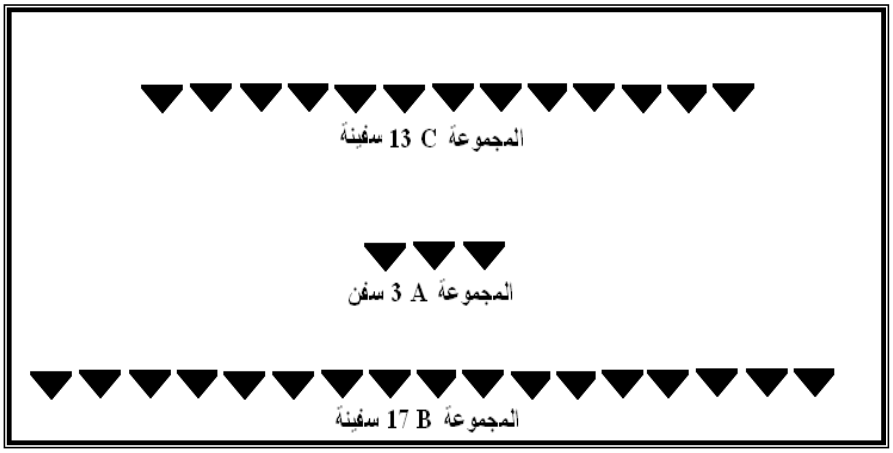
دراسة حالتين لأنظمة متعددة المتغيرات:

1- نمذجة حركة معركة بحرية:

في السنة 1805 وقعت معركة بحرية مشهورة بين الأسطولين الفرنسي والإسباني من جهة بقيادة نابليون بونابرت، والأسطول البريطاني من جهة أخرى بقيادة الأدميرال اللورد نيلسون، تعرف بمعركة ترافالجار. في البداية كانت القوة الفرنسية- الإسبانية مؤلفة من 33 سفينة، في حين أن القوة البريطانية كانت مؤلفة من 27 سفينة. وبفرض أنه خلال كل صولة، فإن كلاً من الطرفين يخسر ما يعادل 10% من سفن خصمه.

أ- اكتب النموذج الحركي لأعداد السفن لكل من الطرفين ثم احسب وارسم أعداد السفن المتبقية لكل طرف خلال العشر صولات القادمة.

ب- إذا كانت السفن الفرنسية-الإسبانية مُرتّبة على شكل ثلاث مجاميع مستقلة، المجموعة A مؤلفة من 3 سفن، والمجموعة B مؤلفة من 17 سفينة، والمجموعةC مؤلفة من 13 سفينة وكما مبين في الشكل الآتي.



الشكل (1): ترتيب الأسطول الفرنسي-الإسباني.

وبفرض أن كل طرف من طرفي المعركة يخسر في كل صولة ما يعادل 5% من سفن خصمه. ولو كانت استراتيجة الأدميرال نيلسون تتألف من ثلاث مراحل: في المرحلة الأولى تُهاجَم المجموعة A من السفن الفرنسية - الإسبانية بقوة بريطانية قوامها 13 سفينة. وفي المرحلة الثانية يضاف إلى السفن التي لديه السفن الناجية من الجولة الأولى وتهاجَم المجموعة B من السفن الفرنسية-الإسبانية. أما في المرحلة الثالثة فتُستخدم كل السفن المتبقية لديه لمهاجمة المجموعة C من السفن الفرنسية- الإسبانية. اكتب النموذج الحركي المعبّر عن استراتيجة الأدميرال نيلسون

ونتائجها تحت الفروض المعطاة، وبين حصيلة السفن المتبقية لكل طرف في نهاية تطبيق هذه الاستراتجية، مبينا لمن ستؤول الغلبة في نهاية هذه المعركة.

الحل: نفرض أن

B_n =عدد السفن البريطانية في الصولة n.

F_n =عدد السفن الفرنسية – الإسبانية في الصولة n.

أ– النموذج الحركي لأعداد السفن لكل من الطرفين :

$$B_n = B_{n-1} - 0.1F_n;\ n = 1,2,3,...$$

$$F_n = F_{n-1} - 0.1B_n;\ n = 1,2,3,...$$

والبرنامج الآتي، واسمه TrafalgarBattle، يقوم بإجراء اللازم.

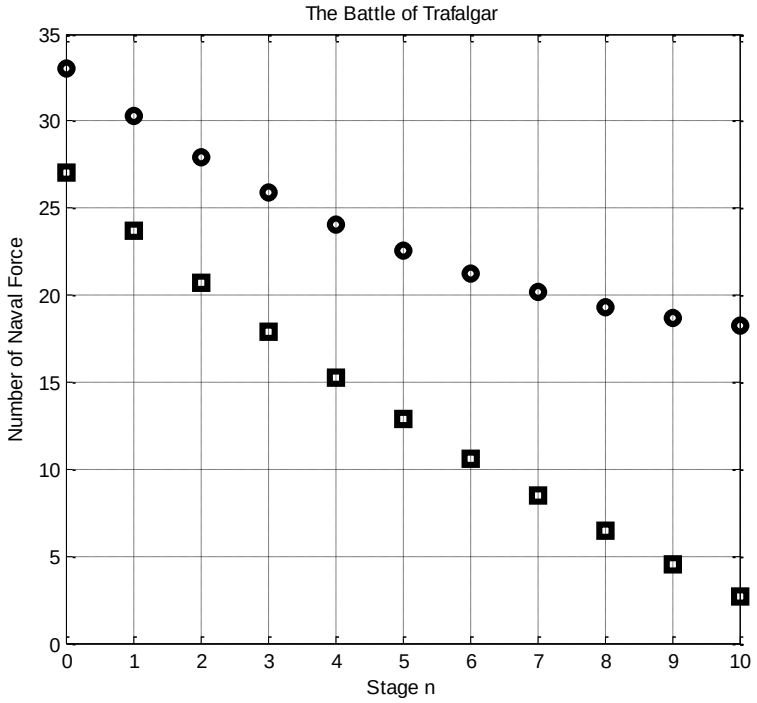
```
% Trafalgar Battle
clear; clc
F(1)=33;B(1)=27;x(1)=0;nmax=10;
for n=1: nmax
x(n+1)=n;
B(n+1)=B(n)-0.1*F(n);
F(n+1)=F(n)-0.1*B(n);
end
disp('  n     B(n)     F(n)')
disp([x' B' F' ])
FixedVector=[B(nmax+1) F(nmax+1)]'
plot(x,B, 'ks' ,x,F, 'ko')
title('The Battle of Trafalgar')
xlabel('Stage n')
ylabel('Number of Naval Force')
grid on
```

ونتيجة الحاسوب على النسحو الآتي:

n	B(n)	F(n)
0	27.0000	33.0000
1.0000	23.7000	30.3000

```
    2.0000   20.6700   27.9300
    3.0000   17.8770   25.8630
    4.0000   15.2907   24.0753
    5.0000   12.8832   22.5462
    6.0000   10.6285   21.2579
    7.0000    8.5028   20.1951
    8.0000    6.4832   19.3448
    9.0000    4.5488   18.6965
   10.0000    2.6791   18.2416

FixedVector =
    2.6791
   18.2416
```



كما هو واضح من النتائج السابقة، فإنه تحت الشروط المعطاة، فإن الأسطول البريطاني سوف يصبح بعد عشر صولات قرابة 3 سفن (المربعات في الشكل)، في حين أن الأسطول الفرنسي-الإسباني سوف يصبح قرابة 18 سفينة (الدوائر في الشكل)، وهذا يعني أن المعركة سوف تُحسم لصالح الأسطول الفرنسي- الإسباني لو جرت العمليات على وفق هذا السياق. لقد وعى قائد

الأسطول البريطاني الأدميرال نيلسون هذه الحقيقة، لذا وضع استراتيجية خاصة بهذه المعركة، وهي مبينة في ب.

ب– تقع إستراتيجية الأدميرال نيلسون في ثلاث مراحل وهي:

المرحلة الأولى: تُهاجم المجموعة A من الأسطول الفرنسي–الإسباني (المؤلفة من ثلاث سفن) بثلاث عشرة سفينة:

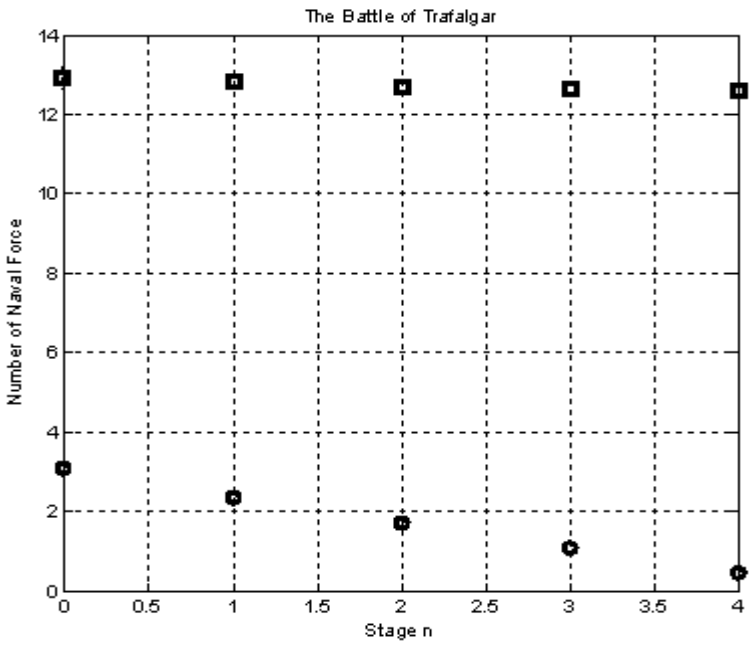
$$B_n = B_{n-1} - 0.05F_n;\ n = 1,2,3,...$$
$$F_n = F_{n-1} - 0.05B_n;\ n = 1,2,3,...$$
$$F_0 = 3,\ B_0 = 13.$$

والبرنامج الآتي، واسمه **TrafalgarBattle1**، يقوم بإجراء اللازم.

```
clear; clc
F(1)=3;B(1)=13;x(1)=0;n=1;
while F(n)>1 & B(n)>1
x(n+1)=n;
B(n+1)=B(n)-0.05*F(n);
F(n+1)=F(n)-0.05*B(n);
n=n+1;
end
disp(' n     B(n)     F(n)')
disp([x' B' F' ])
plot(x,B, 'ks' ,x,F, 'ko')
title('The Battle of Trafalgar')
xlabel('Stage n')
ylabel('Number of Naval Force')
grid on
```

ونتيجة الحاسوب هي:

n	B(n)	F(n)
0	13.0000	3.0000
1.0000	12.8500	2.3500
2.0000	12.7325	1.7075
3.0000	12.6471	1.0709
4.0000	12.5936	0.4385



وكما هو واضح من النتائج العددية فإنه في نهاية الصولة الرابعة (التي تقابل n=4) يكون قد بقي للقوة الفرنسية – الإسبانية أقل من سفينة واحدة (من الناحية النظرية)، في حين يبقى من القـــــــــــــــــــوة البريطانيـــــــــــــــــــــــــة المهاجمـــــــــــــــــــــــــة 12.5936 (أي قرابة 13) سفينة.

المرحلة الثانية: يُهاجم المجموعة B من الأسطول الفرنسي–الإسباني (المؤلفة من سبع عشرة سفينة، فضلا عن السفن المتبقية من المرحلة الأولى) بأربع عشرة سفينة فضلا عن السفن المتبقية من المرحلة الأولى:

عدد السفن البريطانية المهاجمة: 14+12.5936=26.5936 سفينة.

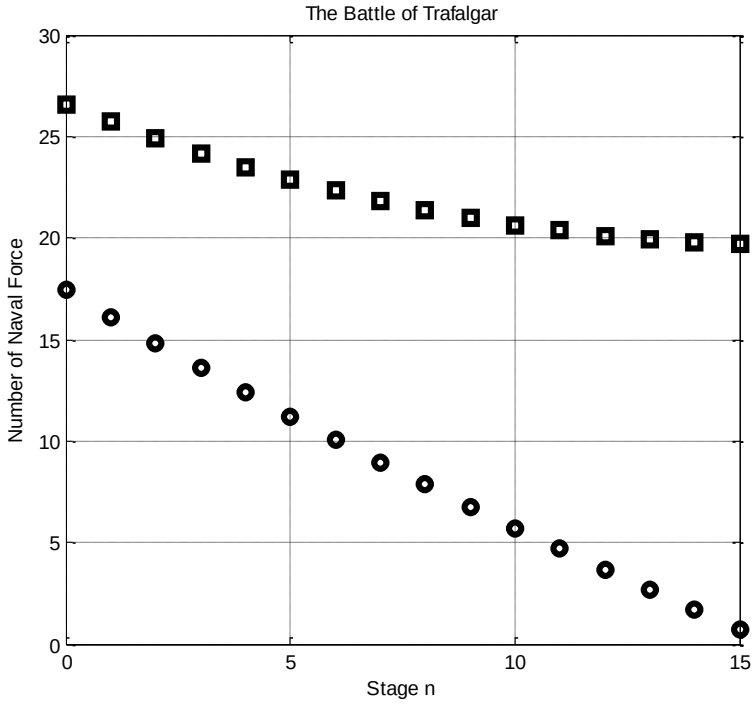
عدد السفن الفرنسية – الإسبانية في المجموعة B: 17+0.4385=17.4385 سفينة.

والبرنامج الآتي، واسمه TrafalgarBattle2 ، يقوم بإجراء اللازم.

```
 %Trafalgar Battle
clear; clc
F(1)= 17.4385;B(1)= 26.5936;x(1)=0;n=1;
while F(n)>1 & B(n)>1
x(n+1)=n;
B(n+1)=B(n)-0.05*F(n);
F(n+1)=F(n)-0.05*B(n);
n=n+1;
end
disp(' n     B(n)     F(n)')
disp([x' B' F' ])
plot(x,B, 'ks' ,x,F, 'ko')
title('The Battle of Trafalgar')
xlabel('Stage n')
ylabel('Number of Naval Force')
grid on
```

ونتيجة الحاسوب هي:

n	B(n)	F(n)
0	26.5936	17.4385
1.0000	25.7217	16.1088
2.0000	24.9162	14.8227
3.0000	24.1751	13.5769
4.0000	23.4963	12.3682
5.0000	22.8778	11.1934
6.0000	22.3182	10.0495
7.0000	21.8157	8.9336
8.0000	21.3690	7.8428
9.0000	20.9769	6.7743
10.0000	20.6382	5.7255
11.0000	20.3519	4.6936
12.0000	20.1172	3.6760
13.0000	19.9334	2.6701
14.0000	19.7999	1.6734
15.0000	19.7162	0.6834



ومن النتائج العددية يلاحظ أنه في نهاية الصولة الخامسة عشرة (التي تقابل n=15) يكون قد بقي من القوة الفرنسية– الإسبانية أقل من سفينة واحدة (من الناحية النظرية)، في حين يبقى من القوة البريطانية المهاجمة 19.7162 (أي قرابة 20) سفينة.

المرحلة الثالثة: يُهاجم المجموعة C من الأسطول الفرنسي– الإسباني (المؤلفة من سبع عشرة سفينة فضلا عن السفن المتبقية من المرحلة الثانية) بجميع السفن المتبقية لديه:

عدد السفن البريطانية المهاجمة: 19.7162 سفينة.

عدد السفن الفرنسية–الإسبانية في المجموعة B: 17+0.6834=17.6834 سفينة.

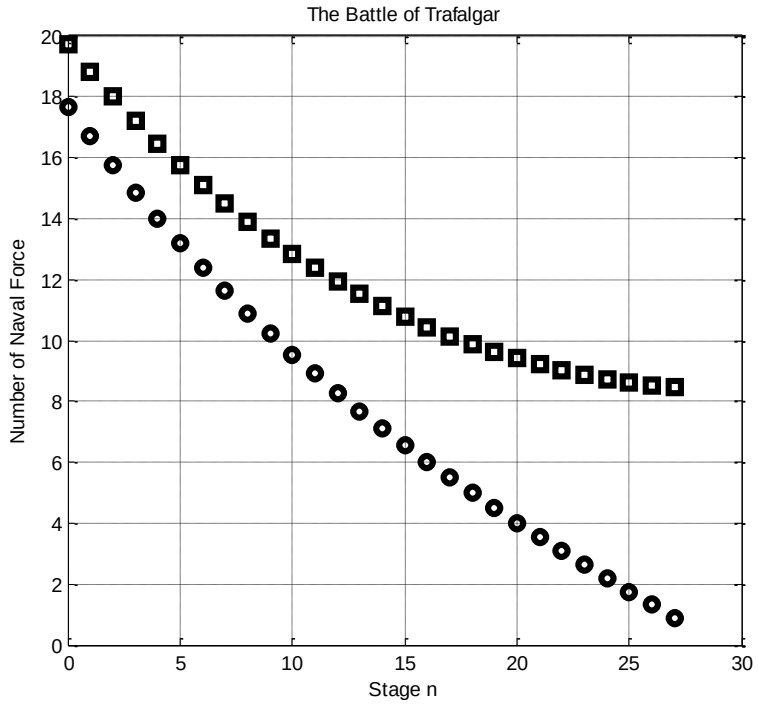
والبرنامج الآتي، واسمه **TrafalgarBattle3**، يقوم بإجراء اللازم.

```
% Trafalgar Battle
clear; clc
F(1)= 17.6834;B(1)= 19.7162 ;x(1)=0;n=1;
while F(n)>1 & B(n)>1
x(n+1)=n;
B(n+1)=B(n)-0.05*F(n);
F(n+1)=F(n)-0.05*B(n);
n=n+1;
end
disp('  n      B(n)      F(n)')
disp([x' B' F' ])
plot(x,B, 'ks' ,x,F, 'ko')
title('The Battle of Trafalgar')
xlabel('Stage n')
ylabel('Number of Naval Force')
grid on
```

ونتيجة الحاسوب هي:

n	B(n)	F(n)
0	19.7162	17.6834
1.0000	18.8320	16.6976
2.0000	17.9972	15.7560
3.0000	17.2094	14.8561
4.0000	16.4665	13.9957
5.0000	15.7668	13.1723
6.0000	15.1081	12.3840
7.0000	14.4889	11.6286
8.0000	13.9075	10.9041
9.0000	13.3623	10.2088
10.0000	12.8519	9.5407
11.0000	12.3748	8.8981
12.0000	11.9299	8.2793
13.0000	11.5160	7.6828
14.0000	11.1318	7.1070
15.0000	10.7765	6.5504
16.0000	10.4490	6.0116

17.0000	10.1484	5.4892
18.0000	9.8739	4.9817
19.0000	9.6248	4.4880
20.0000	9.4004	4.0068
21.0000	9.2001	3.5368
22.0000	9.0232	3.0768
23.0000	8.8694	2.6256
24.0000	8.7381	2.1821
25.0000	8.6290	1.7452
26.0000	8.5418	1.3138
27.0000	8.4761	0.8867



وفي نهاية هذه المرحلة يكون الأسطول البريطاني قد دَمر الأسطول الفرنسي– الإسباني وبقي لديه 8 سفن. ونشير إلى أن الأدميرال نيلسون قد قتل في المرحلة الأخيرة من هذه المعركة، إلا أن استراتيجيته نجحت في تحقيق النصر على الرغم من تفوق الأسطول الفرنسي– الإسباني عدديا على الأسطول البريطاني.