المحاضرة الحادى عشر

أنظمة التطابقات الخطية بمتغير واحد

لنفرض انه لدينا التطابقين التاليين $6x \equiv 4(\mathrm{mod}\ 8)$ و $3x \equiv 2(\mathrm{mod}\ 5)$

اذا وجدنا قيمة x فاننا نسميه حلا لنظام التطابقات ونجد ان $x = 2 + 4k$ و $k = 0,1$ هي جميع الحلول غير المتطابقة قياس 8 بالنسبة للتطابق الاول . اما التطابق الثاني فله حل واحد فقط قياس 5 وهو $x = 4$ ولحل النظام يجب ان نجد عدد x بحيث يكون $x \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4) \rightarrow (1)$ و $x \equiv 4(\mathrm{mod}\ 5) \rightarrow (2)$ من (1) نجد ان $x = 2 + 4k_1$ حيث $k_1 \epsilon Z$ وبالتعويض في (2) نجد ان $2 + 4k_1 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 5)$ اي ان

$4k_1 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 5)$ وبحل التطابق الاخير نجد ان $k_1 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$ وعليه فان $k_1 = 3 + 5k_2$ حيث ان $k_2 \epsilon Z$ وبالتعويض عن قيمة k_1 في المعادلة $x = 2 + 4k_1$ نجد ان $x = 14 + 20k_2$ وبالتالي فان $x = 14(\mathrm{mod}\ 20)$ يحقق التطابقين معا .

مثال:

(أ) إذا كان $3x \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ ، فإن 3,7 حلان متطابقان لذلك التطـابق ، لأن $3 \times 3 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ و $7 \times 3 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ ، $7 \equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$.

(ب) إذا كـان $2x \equiv 6\ (\mathrm{mod}\ 8)$ ، فـإن 7،3 حـلان غيـر متطـابقين ، لأن $2 \times 3 \equiv 6\ (\mathrm{mod}\ 8)$ و $2 \times 7 \equiv 6\ (\mathrm{mod}\ 8)$ بينما $7 \not\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 8)$.

مبرهنة (28):

بعض خواص التطابق مقياس n:

اذا كان $a, b, c \in Z$ وكان $n \in Z^+$ فان

$a \equiv a(\text{mod } n)$ (1)

(2) اذا كان $a \equiv b(\text{mod } n)$ فان $b \equiv a(\text{mod } n)$

(3) اذا كان $a \equiv b(\text{mod } n)$ وكان $b \equiv c(\text{mod } n)$ فان $a \equiv c(\text{mod } n)$

البرهان:

(1) بما ان $n \mid (a - a) = 0$ فان $a \equiv a(\text{mod } n)$

(2) بما ان $a \equiv b(\text{mod } n)$ فاننا نستطيع ايجاد عدد صحيح k بحيث ان $a - b = kn$ اي ان

$b - a = (-k)n$ ومنه نجد أن : $b \equiv a(\text{mod } n)$

(3) بما ان $a \equiv b(\text{mod } n)$ وان $b \equiv c(\text{mod } n)$ فانه يوجد عددان صحيحان j, k بحيث ان

$kn = a - b$ وان $jn = b - c$ وبناءا على ذلك نجد ان

$a - c = (a - b) + (b - c) = kn + jn = (k + j)n$ اي ان $n \mid (a - c)$

ومنه نجد ان $a \equiv c(\text{mod } n)$

مبرهنة (29):

اذا كانت : a, b, c, d اعداد صحيحة وكان : n عددا صحيحا موجبا بحيث ان $a \equiv b(\text{mod } n)$ وان $c \equiv b(\text{mod } n)$ فان :

$a + c \equiv b + d\ (\text{mod } n)$ (1)

$a - c \equiv b - d\ (\text{mod } n)$ (2)

$ac \equiv bd\ (\text{mod } n)$ (3)

ملاحظة: يقال للتطابق الخطي

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

يملك حل اذا وفقط اذا $d \setminus b$ ، حيث ان d=gcd(a, n).

مبرهنة (30):

إذا كان $(a,n)=1$ ، فإن للتطابق الخطي $ax \equiv b \pmod{n}$ حل وحيد قياس n .

البرهان:

$ax \equiv b \pmod{n}$ ، فإن $ac \equiv b \pmod{n}$ ، وأن أي عدد صحيح $e \in Z$ يكون حلاً للتطابق الخطي $ax \equiv b \pmod{n}$ إذاً وإذا فقط كان $c \equiv e \pmod{n}$ ، لأن $ac \equiv b \pmod{n}$ و $ae \equiv b \pmod{n}$ يعني أن $ac \equiv ae \pmod{n}$. لكن $(a,n)=1$ ، إذاً $c \equiv e \pmod{n}$ حسب

ملاحظة:

ان مبرهنة (26) تعني انه اذا كان $c \in Z$ حلا للتطابق الخطي.

مثال:

1- اوجد حلول التطابق $6x \equiv 2 (mod\ 9)$.

الحل: نلاحظ ان 3=(6,9) و $3 \nmid 2$ وليس للتطابق أي حل.

2- اوجد حلول التطابق$9x \equiv 21 (mod\ 30)$.

الحل: لدينا 3=(9,30) و $3 \setminus 21$، أي ان للتطابق ثلاثة حلول غير متطابقة بالمقاس 30.

نقسم طرفي التطابق على 3، فنجد: $3x \equiv 7(mod\ 10)$.

ولما كان $(3,10) = 1$،

ولهذا فان التطابق حل وحيد بالمقاس 10.

وبتعويض بأحد الاعداد من 0 الى 9 نجد ان: x=9 يحقق التطابق

أي ان $x_0 \equiv 9(mod\ 10)$ وهو يحقق التطابق الأصلي $9x \equiv 21(mod\ 30)$ ونحصل على الثلاثة بكتابة

$x \equiv x_0 + 10\ t$, t=0, 1, 2

اي ان $R = \{9, 19,29\}$ هي حلول للمتطابقة $9x \equiv 21(mod\ 30)$.

3- اوجد حلول التطابق$15x \equiv 25(mod\ 35)$

لدينا 5=(15,35) و 21 \ 3، أي ان للتطابق خمسة حلول غير متطابقة بالمقاس 35. ولايجاد الحلول، نقسم طرفي التطابق على 5، فنجد: $3x \equiv 5(mod\ 7)$.

ولما كان $(3,7) = 1$،

ولهذا فان التطابق حل وحيد بالمقاس 7.

وبتعويض بأحد الاعداد من 0 الى 7 نجد ان : x=4 يحقق التطابق

أي ان $x_0 \equiv 4(mod\ 7)$ وهو يحقق التطابق الأصلي $15x \equiv 25(mod\ 35)$ ونحصل على االخمسة بكتابة

$x \equiv x_0 + 7\ t$, t=0, 1, 2,3,4

اي ان $R = \{9, 19,29\}$ حلول للمتطابقة $15x \equiv 25(mod\ 35)$.
