النظم الحركية Dynamical Systems

النقاط الثابتة Fixed Points

إن النقطة التي تكون تكراراتها متماثلة، ثابتة لا تتغير، تسمى نقطة ثابتة. وتعد دراسة النقاط الثابتة لأي نظام حركي من المسائل البالغة الأهمية لكونها ترتبط باستقرارية النظام.

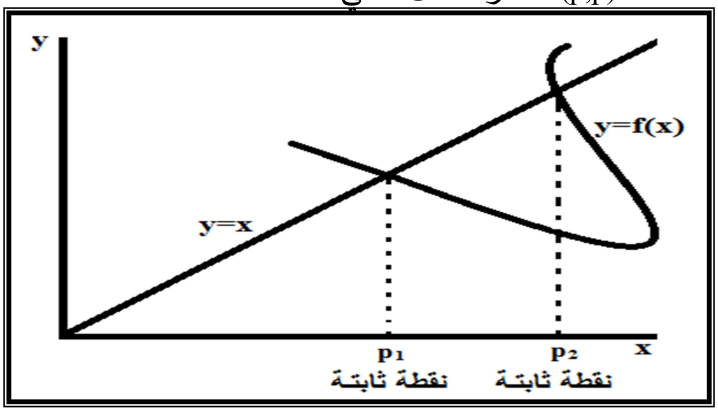
التعريف (3)

إذا كانت النقطة p تقع في مُنطلَق الدالة f، فإنها تكون **نقطة ثابتة Fixed Point** للدالة f إذا حققت الشرط الآتي:

f(p)=p. **(6-20)**

ملاحظة

من الناحية البيانية فإن النقطة p تكون نقطة ثابتة للدالة f إذا وفقط إذا قاطع (أو لامس) المنحني f المستقيم y=x عند النقطة (p,p)، انظر الشكل الآتي



الشكل (4) إيجاد النقاط الثابتة بيانيا

تصنيف النقاط الثابتة

Classification of Fixed Points

المبرهنة الآتية تلخص تصنيف النقاط الثابتة إلى نقاط جاذبة أو طاردة.

المبرهنة (1)

إذا كانت f تطبيقاً في مجموعة الأعداد الحقيقية R وقابلة للاشتقاق عند النقطة الثابتة p:

أ- فإذا كانت $|f'(p)|<1$، فإن p تسمى **نقطة ثابتة جاذبة Attracting Fixed Point (أو غَور Sink)** للتطبيق f.

ب- وإذا كانت $|f'(p)| > 1$، فإن p تسمى **نقطة ثابتة طاردة Repelling Fixed Point** (**أو ينبوع Source**) للتطبيق f.
ت- أما إذا كانت $|f'(p)| = 1$، فأن p ممكن أن تكون جاذبة أو طاردة أو غير ذلك.

المثال (8)

افرض أن لديك التطبيق اللوجستي بالمعلمة $\mu > 0$:

$$f(x) = \mu x\ (1-x);\ \ 0 \le x \le 1$$

أ- جد قيم μ بحيث تكون 0 نقطة ثابتة جاذبة.

ب- جد قيم μ بحيث يكون هناك نقاط ثابتة.

ت- جد قيم μ التي تكون فيها النقاط الثابتة جاذبة أو طاردة.

الحل

$$f(x) = \mu x\ (1-x) = \mu x - \mu x^2.$$

أ-

$$f(p) = p$$
$$\therefore \mu p - \mu p^2 = p$$

لذا إما أن تكون $p = 0$ أو $\mu - \mu p = 1$، وهذا الأخير بدوره يقود إلى أن $p = 1 - 1/\mu$. ولو كانت $0 < \mu \le 1$، فان $1 - 1/\mu \le 0$، وبذلك يكون لدينا نقطة ثابتة واحدة في الفترة [0,1] هي p=0.

ب- عندما تكون $\mu > 1$، فهناك نقطتان ثابتتان مختلفتان في الفترة [0,1]: $p_1 = 0$ و $p_2 = 1 - 1/\mu$.

ت- لمعرفة فيما إذا كانت النقاط الثابتة جاذبة أم طاردة، نلاحظ أن:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \mu - 2\mu x.$$
$$\therefore f'(0) = \mu,$$
$$f'(1 - 1/\mu) = \mu - 2\mu(1 - 1/\mu) = 2 - \mu.$$

فإذا كانت $0 < \mu < 1$، فان $f'(0) = \mu < 1$، وبذلك تكون النقطة الثابتة p=0 هي نقطة جاذبة. أما إذا كانت $\mu > 1$، فان p=0 هي نقطة طاردة. بالطريقة نفسها نجد أن النقطة الثابتة $p = 1 - 1/\mu$ تكون جاذبة عندما تكون $1 < \mu < 3$، وتكون طاردة عندما تكون $\mu > 3$.

المثال (9)

افرض أن لديك التطبيق:

$$f(x) = 2x^2 - 5x$$

في مجموعة الأعداد الحقيقية R. جد النقاط الثابتة لهذا التطبيق وصنفها:

أ- يدويا.

ب- حاسوبيا.

الحل

أ-

$$f(p) = p$$
$$\therefore 2p^2 - 5p = p$$
$$2p(p-3) = 0$$
$$\therefore p_1 = 0,\ p_2 = 3.$$

ولتصنيف هاتين النقطتين الثابتتين، نجد أن:

$$f'(x) = 4x - 5$$
$$\because \left|f'(0)\right| = \left|4(0) - 5\right| = 5 > 1$$

لذا فإن $p_1 = 0$ هي نقطة طاردة. كذلك:

$$\because \left|f'(3)\right| = \left|4(3) - 5\right| = 7 > 1$$

لذا فإن $p_2 = 3$ نقطة طاردة أيضا.

ب- البرنامج الآتي، واسمه **FixedPoints**، يقوم بإيجاد النقاط الثابتة لأي تطبيق f ومن ثم تصنيفها إلى نقاط جاذبة أو طاردة.

```
% Fixed Points
clear
clc
syms x ;
f=2*x^2-5*x
n=2;
disp('Fixed Points are:')
p=solve('2*p^2-5*p=p');
disp(p)
disp('Df=df(x)/dx:')
d=diff(f);
```

```
disp(d)
np=length(p);
d1=double(subs(d,p));
for i=1:np
   disp('-------------------------------------')
if abs(d1(i))<1
   disp(p(i))
   disp('is an attracting fixed point (Sink)')

elseif abs(d1(i))>1
   disp(p(i))
   disp(' is a repelling fixed point (Source)')
end
end
```

ونتائج البرنامج هي:

```
f =
2*x^2 - 5*x
Fixed Points are:
 0
 3
Df=df(x)/dx:
4*x - 5
-------------------------------------
0
 is a repelling fixed point (Source)
-------------------------------------
3
is a repelling fixed point (Source)
```

تمارين

1- جد مدار كل نقطة x_0 في أدناه بالنسبة للدالة $f(x)$ التي تقابلها:

a- $x_0 = 1,\ f(x) = x^2$.

b- $x_0 = -1,\ f(x) = x^2 - 1$.

c- $x_0 = -2,\ f(x) = x^2 + 1$.

d- $x_0 = 0,\ f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$.

e- $x_0 = \frac{1}{3},\ f(x) = 4x - 4x^2$.

Ans:
{1,1,1,1,1,…},
{-1,0,-1,0,-1,…},
{-2,5,26,677,458330,…},
{0.025, 0.3125, 0.347656…, 0.370864…,…},
{0.3333…, 0.8888…, 0.3950…,0.9559….,…}.

2- جد مدار النقطة $x_0 = 5$ بالنسبة للدالة $f(x) = \cos(x)$ ، وتحقق عمليا من أن $f^{[n]}(x_0)$ تقترب من 0.7391 كلما ازدادت قيمة n.

3- جد النقاط الثابتة لكل من التطبيقات الآتية وصنفها:

a- $f(x) = 4x - x^2$.
b- $f(x) = x^3 - x/3$.
c- $f(x) = \sqrt{x}$.
d- $f(x) = e^{x-1}$.
e- $f(x) = \sin^{-1}(x)$.
f- $f(x) = 1/x$.
Ans. a- 0,3 both are repelling, c- 0 is repelling; 1 is attracting, e- 0 is repelling.

4- جد النقاط الثابتة لكل من التطبيقات الآتية ثم صنفها:

a- $f(x) = 2x - x^2$.
b- $f(x) = (3x - x^3)/2$.
c- $f(x) = x^2 \tan(x)$.
Ans. a- 0 source, 1 sink
b-0 source, -1 sink, 1 sink.
c- 0 sink, -0.86033 source.