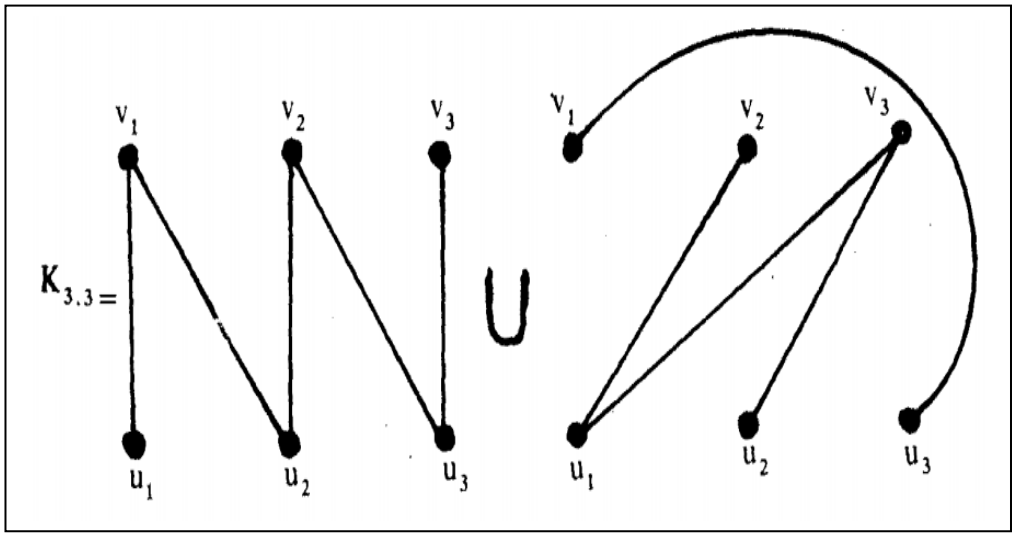
السمك وعدد التقاطع: : (The Thickness and Crossing Number):

يعرف سمك بيان **G** بأنه العدد الأصغر من البيانات المستوية التي اتحادها هو **G**.

يرمز عادة لسمك البيان **G** بالرمز $\theta(G)$. واضح أن **G** يكون مستويا إذا وإذا فقط $\theta(G)=1$. كما أن $\theta(K_5)=2$ و $\theta(K_{3,3})=2$. لاحظ الشكل **(12-1)**.



الشكل **(12-1)**.

بما أن عدد حافات البيان المستوي الاعظمي الذي عدد رؤوسه **n** هو $(3n-6)$، فأن لكل بيان **G**، يكون : $\theta(G)\geq \dfrac{m}{3n-6}$، حيث أن هذه الصيغة تعطينا القيد الأدنى لسمك أي بيان . وهو أيضا القيمة المضبوطة لسمك بعض البيانات الخاصة. بما أن عدد حافات البيان التام من الرتبة **n** هو $\frac{1}{2}n(n-1)$، فأنه بموجب العلاقة يكون لدينا:

$$\theta(K_n)\geq\left\{\frac{m}{3n-6}\right\}$$

$$\theta(K_n) \geq \left[\frac{n(n-1)+6n-14}{6n-12}\right] = \left[\frac{n+7}{6}\right].$$

المبرهنة (1.12): إذا كان $n \neq 9$ $n \not\equiv 4(\mathbf{m0d}\,6)$، فأن

$$\theta(K_n) = \left[\frac{n+7}{6}\right].$$

عندما $n \equiv 4(\mathbf{mod}\,6)$، العلاقة قد تصح أو لا تصح. وكما وجدت في العلاقة أن $[(n+7)/6]$ هو قيد أدنى لسمك K_n، ولكن برهان العدد هو نفسه قيد أعلى مطول ومعقدة.

المبرهنة (2.12):

$$\theta(K_{n,m}) = \left\{\frac{mn}{2(m+n-2)}\right\}.$$

عدا عندما $m < n$ و mn فردي ، يوجد عدد صحيح k بحيث أن $[2k(m-2)/(m-2k)]$.

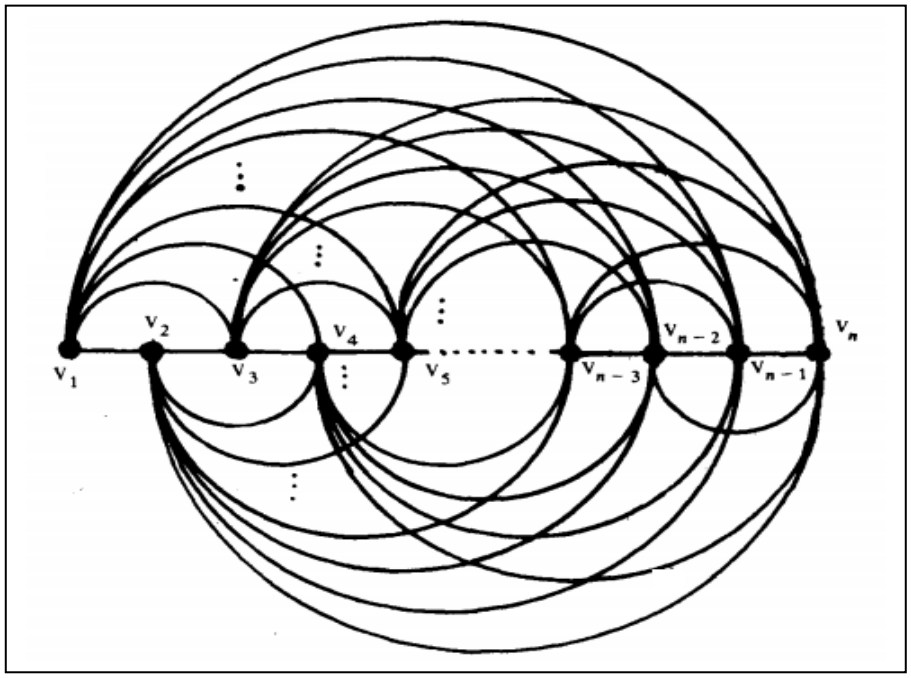
كما يعرف عدد التقاطع والذي يرمز له $v(G)$، لأي بيان G، على أنه أصغر عدد ممكن لتقاطعات حافاته عندما يرسم البيان G في المستوي ، علما أنه لا يسمح بتقاطع أكثر من حافتين في نقطة واحدة.

القيمة المضبوطة لـ $v(G)$ غير معروفة بعض البيانات الخاصة ، ولكن هناك قيود عليا لبعض منها، ويعتقد بعض الباحثين أنها القيم المضبوطة. سوف نقتصر فقط على بيانين خاصين هما البيان التام وبيان ثنائي التجزئة تام.

المبرهنة (3.12): لكل n ، $n \geq 4$ ، يكون :

$$\nu(K_n) \leq \begin{cases} n(n-2)^2(n-4)/48, & \text{عندما } n \text{ زوجي} \\ (n-1)(n-3)(n^2-4n+1)/48, & \text{عندما } n \text{ فردي} \end{cases}$$

البرهان : مناقشة



الشكل (12–2)عندما n عددا زوجيا

المبرهنة (4.12): ليكن r ، s عددان صحيحان موجبان ، فأن:

$$v(K_{m,n}) \leq \begin{cases} (r^2 - r)(s^2 - s), & \text{عندما } m = 2r, n = 2s \\ (r^2 - r)s^2, & \text{عندما } m = 2r, n = 2s + 1 \\ r^2(s^2 - s), & \text{عندما } m = 2r + 1, n = 2s \\ r^2 s^2, & \text{عندما } m = 2r + 1, n = 2s + 1 \end{cases}$$

المبرهنة (5.12): ليكن r ، s عددان صحيحان موجبان ، فأن:

$$v(K_{m,n}) = \begin{cases} (r^2 - r)(s^2 - s), & \text{عندما } m = 2r, n = 2s \\ (r^2 - r)s^2, & \text{عندما } m = 2r, n = 2s + 1 \\ r^2(s^2 - s), & \text{عندما } m = 2r + 1, n = 2s \\ r^2 s^2, & \text{عندما } m = 2r + 1, n = 2s + 1 \end{cases}$$

تمارين :

1. جد كلا من السمك وعدد التقاطع للبيان التام من الرتبة 7.
2. جد كلا من السمك وعدد التقاطع للبيان $\mathbf{K}_{3,5}$.
3. برهن المبرهنة (4.12).
4. برهن المبرهنة (5.12).
5. ماذا يمثل عدد التقاطع ، وهل للبيان المستوي عدد تقاطع.