## 1- نمذجة العلاقة البيئيّة بين البوم المُرقّط والصقور

Modeling the Ecological Relation between Spotted Owls and Hawks

بيئة يتنافس فيها البوم المُرقّط Spotted Owls والصقور Hawks. ولنمذجة العلاقة البيئية بين هذين الحيوانين نفرض الفرضيتان الآتيتان:

**الفرضية الأولى:** عند غياب النوع الآخر، فان كل حيوان ينمو نمو غير مقيّدٍ بحيث يكون التغيير في حجم المجتمع في أي فترة زمنية (مثلا باليوم الواحد) يتناسب مع حجم المجتمع عند بداية تلك الفترة الزمنية.

**الفرضية الثانية:** عند وجود البوم المُرقّط والصقور سوية في بيئة واحدة، فهناك تفاعل سلبي بينها، أي إن وجود أي منهما في البيئة يؤدي إلى إقلال حجم مجتمع الحيوان الآخر.

يمكننا الآن استخدام المعلومات المعطاة لصياغة نموذج رياضي يصف العلاقة البيئية بين البوم المُرقّط والصقور. فلو فرضنا أن $O_n$ يمثل حجم مجتمع البوم المُرقّط في تلك البيئة في اليوم n، وأن $H_n$ يمثل حجم مجتمع الصقر في تلك البيئة في اليوم n. فمن الفرضية الأولى نستنتج أن:

$$\Delta O_n \propto O_n\,,\ \Delta H_n \propto H_n\,.$$

وبتحويل التناسب إلى معادلة نجد أن:

$$\Delta O_n = k_1 O_n\,,\ \Delta H_n = k_2 H_n\,.$$

ومن الفرضية الثانية نستنتج أن:

$$\Delta O_n \propto -O_n H_n\,,\ \Delta H_n \propto -O_n H_n\,.$$

وبتحويل التناسب إلى معادلة نجد أن:

$$\Delta O_n = -k_3 O_n H_n\,,\ \Delta H_n = -k_4 O_n H_n\,.$$

وبضم الفرضيتين سوية بنظام واحد ينتج النموذج الرياضي الآتي:

$$\Delta O_n = O_{n+1} - O_n = k_1 O_n - k_3 O_n H_n\,,$$
$$\Delta H_n = H_{n+1} - H_n = k_2 H_n - k_4 O_n H_n\,.$$

وبعد تبسيط المعادلتين الأخيرتين ينتج النموذج الرياضي الآتي والمعبّر عن العلاقة البيئية بين حجمي مجتمعي هذين الحيوانين:

$$O_{n+1} = (1+k_1)O_n - k_3 O_n H_n;\ n = 0,1,2,....$$
$$H_{n+1} = (1+k_2)H_n - k_4 O_n H_n;\ n = 0,1,2,...$$

إذ إن $k_1$ و $k_2$ يمثلان نسبة النمو غير المقيد لحجم مجتمعي البوم المُرقّط والصقور، على التوالي. أما $k_3$ و $k_4$ فيمثلان معلمتي التفاعل بين المجتمعين.

لنفرض الآن أن المتجه الثابت هو (O H)'، لذا فهو يحقق المعادلتين الأخيرتين:

$$O = (1+k_1)O - k_3 O\ H\ \ ,$$
$$H = (1+k_2)H - k_4 OH\ .$$

ومن المعادلة الأولى نجد أن:

$$O(k_1 - k_3\ H) = 0\,,$$

أي إنه عندما تكون $O = 0$ أو $H = k_1 / k_3$ فلا يحدث تغيير في حجم مجتمع البوم المُرقّط. ومن المعادلة الثانية نجد أن:

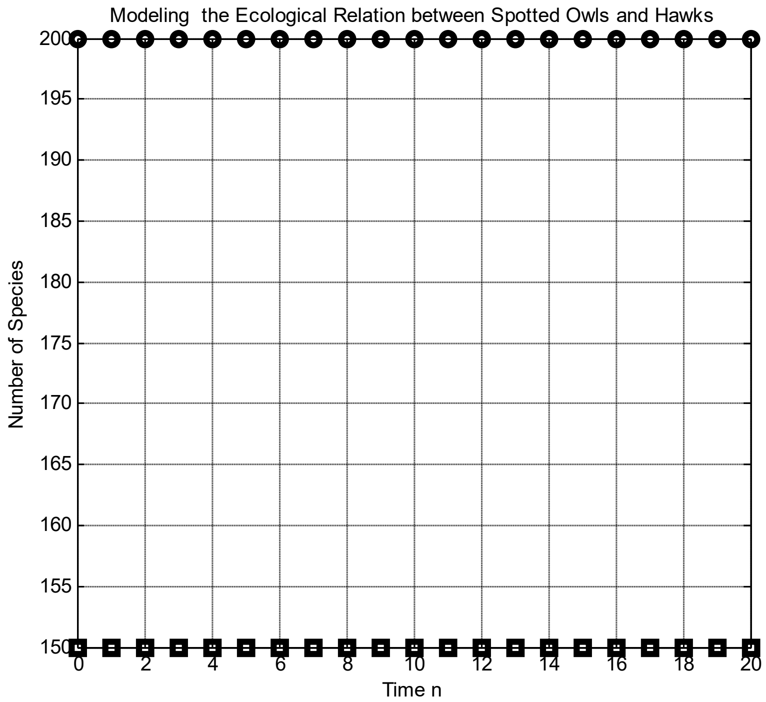
$$H(k_2 - k_4 O) = 0\,,$$

أي إنه عندما تكون $H = 0$ أو $O = k_2 / k_4$ فلا يحدث تغيير في حجم مجتمع الصقر. وبذلك يكون المتجه الثابت موجودا عند النقطتين (O,H)=(0,0) و $(O,H)= (k_1 / k_3, k_2 / k_4)$.

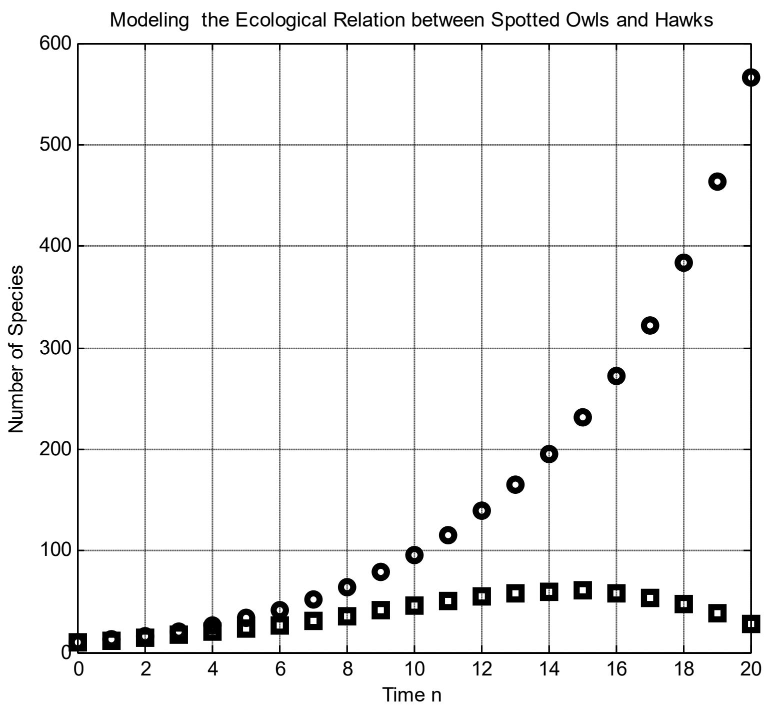
لنفرض الآن أن $k_1 = 0.2$ و $k_2 = 0.3$ و $k_3 = 0.001$ و $k_4 = 0.002$. أي إن المتجه الثابت يكون موجودا عند النقطتين (O,H)=(0,0) و (O,H)=(200,150). والبرنامج الآتي، واسمه OwlsHawks، يقوم بانجاز الرسم الزمني وفق هذه المعطيات وعند القيمتين الابتدائيتين $O_0 = 200$ و $H_0 = 150$.

```
%Owls and Hawks
clear
clc
k1=0.2;k2=0.3;k3=0.001;k4=0.002;
O(1)=150;H(1)=200;x(1)=0;nmax=20;
for n=1:nmax
x(n+1)=n;
O(n+1)=(1+k1)*O(n)-k3*O(n)*H(n);
H(n+1)=(1+k2)*H(n)-k4*O(n)*H(n);
end
disp('   n      O(n)      H(n)')
disp([x' O' H' ])
plot(x,O, 'ks' ,x,H, 'ko')
title('Modeling  the Ecological Relation between Spotted Owls and
Hawks')
xlabel('Time n')
ylabel('Number of Species')
grid on
```

ونتيجة الرسم للبرنامج هي:



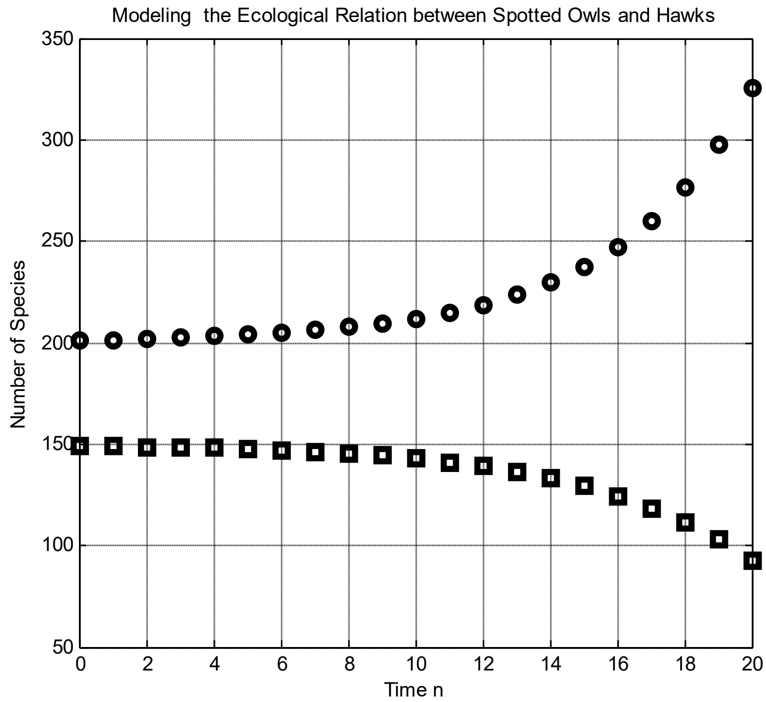

وكما هو جلي فان استقرارية النظام تتحقق في هذه الحال. وعند القيمتين الابتدائيتين $O_0 = 10$ و $H_0 = 10$ ، أعطى البرنامج الرسم الآتي:




ويلاحظ الآن أن حجم مجتمع البوم سوف يكبر قليلا ثم يأخذ بالتناقص، في حين أن حجم مجتمع الصقور سوف يتزايد على نحو سريع، ولا يوجد هناك استقرارية في النظام.

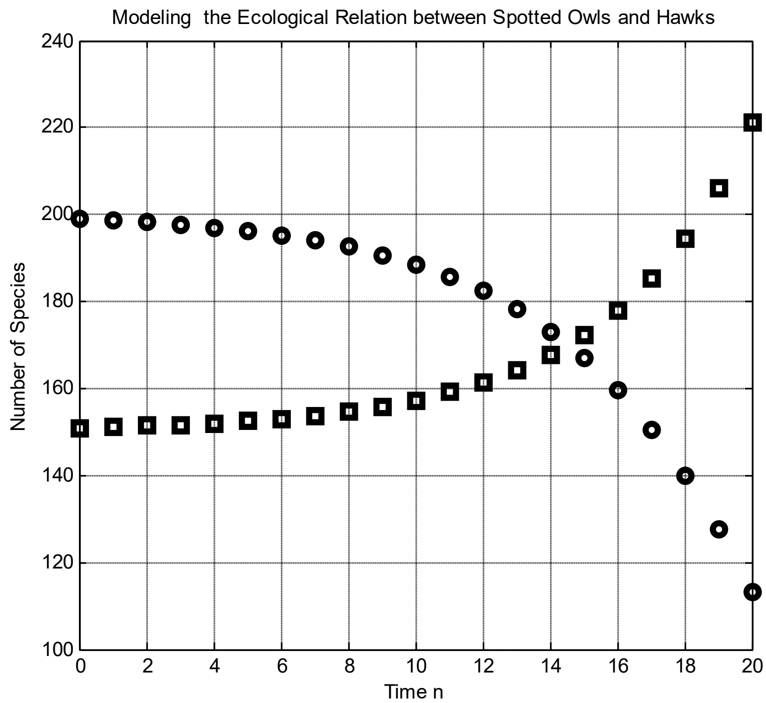
نروم الآن دراسة السلوك الزمني للنموذج عند اختيار قيم ابتدائية قريبة من المتجه الثابت.

1- عند القيمتين الابتدائيتين $O_0 = 149$ و $H_0 = 201$ ، أعطى البرنامج الرسم الآتي:




ويلاحظ أن حجمي المجتمعين سوف يتباعدان بسرعة، ولا يوجد هناك استقرارية في النظام.

2- بإعادة تشغيل البرنامج السابق عند القيمتين الابتدائيتين $O_0 = 151$ و $H_0 = 199$ ، أعطى البرنامج الرسم الآتي:




ويلاحظ الآن أن حجمي المجتمعين سوف يتقاربان أولا ثم يتباعدان بسرعة، إذ يتناقص حجم مجتمع الصقور ويتزايد حجم مجتمع البوم المُرقّط، ولا يوجد هناك استقرارية في النظام.

لاحظ أنه في الحالتين الأخيرتين فإن تغييراً قليلاً في أعداد أي من المجتمعين يؤدي إلى نمو مجتمع وانقراض المجتمع الآخر. وكما لاحظنا في هذا النظام البيئي، وحسب هذا النموذج الرياضي، فعندما يكون في المجتمع 150 بوم و 200 صقر بالتمام، فإن هذا النظام سوف يكون في حالة استقرار تام. ولو فُقد بومٌ واحدٌ فإن مجتمع البوم سوف ينقرض ومجتمع الصقور سوف ينمو بدون قيد. وفي الطرف الآخر، إذا أضيف بوم واحد إلى مجتمع البوم، فإن مجتمع البوم ينمو بدون قيد، في حين أن حجم مجتمع الصقور سوف ينقرض. وكما هو واضح من هذا التحليل فان هذا النموذج الرياضي حساس Sensitive للقيم الابتدائية، إذ عند إجراء تغيير بسيط على القيم الابتدائية يتغير سلوك النموذج على نحو كبير. وتعد مسألة الحساسية للقيم الابتدائية Sensitivity to Initial Conditions سمه مهمة تتمتع بها بعض النظم الحركية غير الخطية (مثل هذا النموذج)، كما أن لهذه الخاصية علاقة وثيقة مع موضوع ذو جاذبية خاصة سوف نتناوله في الفصل الحادي والعشرين، يُعرف بالهَباء أو الفوضى Chaos. ونشير إلى أن الفصل الثامن عشر يتناول دراسة نمذجة علاقة الافتراس بين نوعين من الحيوانات وعندما يكون الزمن مستمرا وذلك من خلال معادلات تفاضلية.

# تمارين

**6−1** ارسم مخطط تبعثر $x_{n+1}$ ضد $x_n$ للنموذج اللوجستي بالقيم الابتدائية $x_0 = 0.1, 0.5, 0.9$ و r=1,2,3.

**6−2** افرض أن هناك N=50 شخصا في محيط ما، ما لا يقل عن واحد من هؤلاء الأشخاص مصاب بالزكام. نمذج أعداد المصابين في هذا المرض بهذا المحيط بعد n من الأيام. ارسم الرسم الزمني لعدد المصابين بهذا المرض في ذلك المحيط خلال الأسبوع القادم عندما تكون نسبة النمو r=0.007 وعدد المصابين بهذا المرض $x_0 = 5$. بعد كم يوم سوف يزيد عدد المصابين بهذا المرض عن 10، وبعد كم يوم سوف يزيد عن 30؟

Ans. 3, 8.

**6−3** مثّل المعادلات الفرقية الآتية بمتجهات ومصفوفة:

$$x_{1(n+1)} = 0.2 + 0.2x_{1(n)} + 0.7x_{2(n)},$$
$$x_{2(n+1)} = 0.5 + 0.4x_{1(n)} + 0.1x_{2(n)},$$
$$x_{i(n+1)} = 0.8 + 0.2x_{1(n)} + 0.2x_{2(n)}.$$

**6−4** إذا كانت $x_n$ و $y_n$ و $z_n$ ثلاثة متغيرات مترابطة فيما بينها وفق النظام الآتي:

$$x_{n+1} = 0.5 + 0.6x_n + 0.2y_n + 0.4z_n,$$
$$y_{n+1} = 0.3 + 0.2x_n + 0.6y_n + 0.5z_n,$$
$$z_{n+1} = 0.8 + 0.2x_n + 0.2y_n + 0.1z_n,$$
$$x_0 = 1,\ y_0 = 3,\ z_0 = 2.,$$

أ− مثّل هذا النظام بطريقة المصفوفات.

ب− ارسم الرسم الزمني لأول 50 قيمة مولدة من هذا النظام.

ت− جد المتجه الثابت.

**6−5** رُصدت سلعة معينة ضمن حركة السوق ووجلوحظد أن هناك تفاعلاً بين سعرها والكمية المعروضة منها. فلو كان المتغير $P_n$ يمثل سعر السلعة في اليوم n (دينار)، وكان $Q_n$ يمثل الكمية المعروضة من السلعة في اليوم n (بعدد الكارتونات)، وبفرض أن العلاقة بين هذين المتغيرين مُمثلة بالنظام الآتي:

$$P_{n+1} = P_n - 0.1(Q_n - 500),$$
$$Q_{n+1} = P_n + 0.2(P_n - 100).$$

أ− جد المتجه المتزن لهذا النظام مبيننا دلالته بخصوص هذه المسألة.

ب− إذا كان سعر هذه السلعة في يوم السبت هو $P_0 = 120$ ديناراً وكانت الكمية المعروضة من تلك السلعة في ذلك اليوم هي $Q_0 = 500$ كارتوناً، استخدم النموذج الرياضي السابق لإيجاد سعر تلك السلعة والكمية المعروضة منها في الأيام الخمسة القادمة.

Ans. أ - $(P\ \ Q) = (100\ \ 500)'$.

ب −

$P_n$={ 120 119.93 119.79 119.58 119.30 118.95 },
$Q_n$={500.00 501.40 502.80 504.20 505.58 506.95}.

**6-6** افرض في المبحث 6-4-1 أن تقنية الأسلحة المتوافرة لدى الأسطول البريطاني متطورة على مثيلاتها للأسطول الفرنسي-الإسباني بحيث أن الأسطول الفرنسي-الإسباني يفقد ما يعادل 15% من سفن خصمه في كل صولة، في حين أن الأسطول البريطاني يفقد ما يعادل 5% من سفن خصمه في كل صولة. فإذا كانت القوة الفرنسية-الإسبانية مؤلفة من 33 سفينة، في حين أن القوة البريطانية كانت مؤلفة من 27 سفينة. اكتب النموذج الحركي لأعداد السفن لكل من الطرفين ثم احسب وارسم أعداد السفن المتبقية لكل طرف خلال العشر صولات القادمة.

**7-6** افرض أن هناك علاقة فريسة – مفترس في بيئة يفترس فيها البوم المُرقّط الفئران. فلو فرضنا أن $M_n$ يمثل حجم مجتمع الفئران في تلك البيئة في السنة n، وان $O_n$ يمثل حجم مجتمع البوم المرقط في تلك البيئة، وبفرض أن العلاقة بين حجمي المجتمعين متمثلة بالنظام الآتي:

$$M_{n+1} = 1.2M_n - 0.001O_nM_n$$

$$O_{n+1} = 0.7O_n + 0.0020.001O_nM_n$$

ادرس السلوك بعيد المدى لهذا النظام، وجد المتجه الثابت، ثم تحقق من حساسية هذا النظام للقيم الابتدائية.