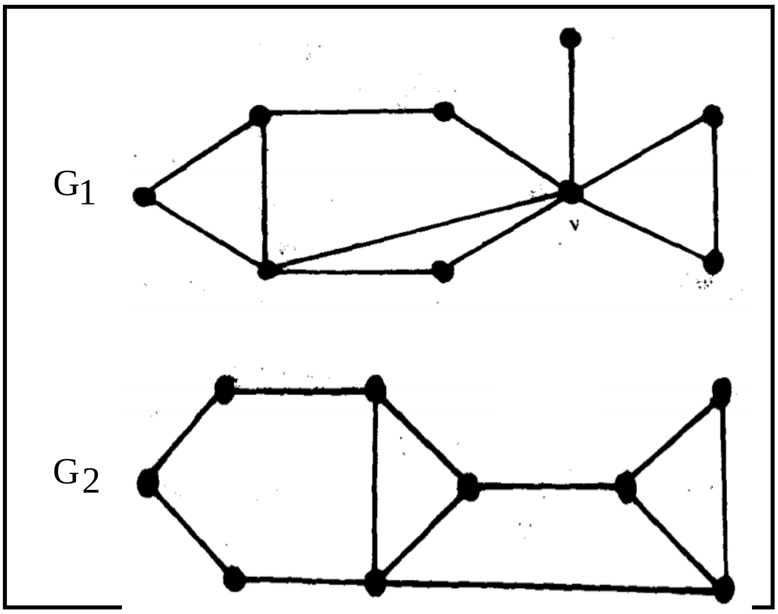
مبرهنة كورتوفسكي (Kuratowski's Theorem):

تستخدم هذه المبرهنة في تمييز البيانات المستوية وغير المستوية، ولكن قبل إعطاء المبرهنة هناك بعض المفاهيم والنتائج الأولية التي يجب التطرق إليها.

يُقال لرأس v في بيان متصل G انه رأس قاطع (cut – vertex) أو نقطة مفصلية (articulation point) اذا كان البيان G - v ، الناتج من G بازالة الرأس v مع كل الحافات الواقعة عليه غير متصل .

ويقال لبيان متصل انه قابل للانفصال (Separable) اذا احتوى على رأس قاطع . كما ويقال لبيان متصل انه غير قابل للانفصال (non – separable) أو ثنائي الاتصال (biconnected) اذا لم يحتو على رأس قاطع . فمثلاً . البيان G_1 في الشكل (13-1) هو بيان قابل للانفصال وان الرأس v هو رأس قاطع . أما البيان G_2 فهو غير قابل للانفصال .



الشكل (1−13)

اذا كان v رأساً قاطعاً في بيان قابل للانفصال G وكانت C مركبة في G − v، فان البيان الجزئي الناتج من C باضافة الرأس v مع كل حافات G التي تصل رأساً في C مع الرأس v يطلق عليه قطعة (piece) البيان القابل للانفصال G نسبة للرأس القاطع v .

مبرهنة (1.13) : يكون الرأس v رأساً قاطعاً لبيان بسيط متصل G عدد رؤوسه n ، حيث $n \geqq 3$ ، اذا واذا فقط وجد في G رأسان u و w بحيث ان كل درب يصل u و w يمر بالرأس v .

البرهان : اذا كان v رأساً قاطعاً ، فان $G-v$ غير متصل . لتكن H_1 و H_2 مركبتين في $G-v$ ، وليكن u رأساً في H_1 ، و w رأساً في H_2 واضح ان كل درب بين u و w في G يمر بالرأس v .

من جهة اخرى ، افرض أن هنالك رأسين u و w في G بحيث ان كل درب بينهما يمر بالرأس v عندئذ ، لايوجد أي درب بين u و w في البيان $G-v$ وعليه ، فان $G-v$ غير متصل ، ولذلك فان v رأس قاطع .

لاجل السهولة ، سوف نرمز للدرب الذي يصل بين الرأسين u و w بالرمز $P[u, w]$ واذا كان طول الدرب هو 1 ، فسنكتب $[u, w]$ وهو في الواقع الحافة $[u, w]$. واذا كان $P[u, w]$ ، $P[w, v]$ دربين ، فان $P[u, w] + P[w, v]$ هو مسار من u الى v يتكون من متتابعة حافات الدرب $P[u, w]$ يليها متتابعة حافات $P[w, v]$. وهذا المسار يتضمن درباً بسيطاً بين u و v .

المبرهنة الآتية ضرورية لإثبات مبرهنة كورتوفسكي :

مبرهنة (2.13) : [مبرهنة منجِر – ديراك (Menger – Dirac)] :

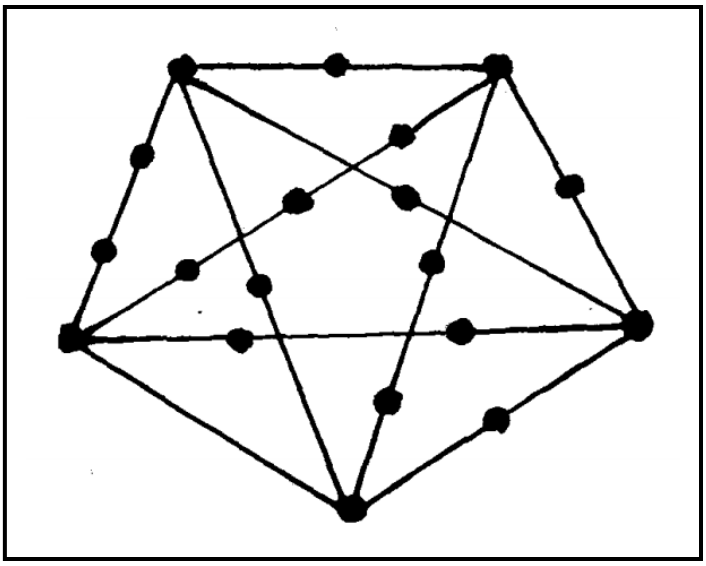
اذا كان $P = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ درباً بسيطاً يصل بين رأسين مختلفين v_0 و v_k في بيان بسيط غير قابل للانفصال G عدد رؤوسه n حيث أن $n \geqq 3$. فانه يوجد في G دربان بسيطان P' ، P'' بين v_0 و v_k بحيث أن :

(1) لا توجد رؤوس مشتركة بين P' ، P'' ماعدا الرأسين v_k و v_0 .

(2) اذا تتبعّنا كلاً من P' ، P'' من v_0 الى v_k ، فان أدلة رؤوس P التي تصادفها تكون بترتيب متزايد .

البرهان غير مطلوب .

واضح ان كون بيان ما مستوياً أو غير مستوٍ لايتأثر لو قسمنا احد الحافات الى حافتين بادخال رأس جديد بدرجة 2 ، أو لو دمجنا حافتين بحافة واحدة بازالة رأس درجته 2.
هذه الفكرة تقودنا الى التعريف الاتي :
يقال لبيانين G و G' أنهما متكافئان توبولوجياً (homeomorphic) اذا أمكن تحويلهما الى بيانين متشاكلين بادخال رؤوس جديدة بدرجة 2 على بعض حافات أحدهما أو كليهما . فمثلاً ، البيان المعطى في الشكل (13-2) يكافيء توبولوجياً البيان التام K_5.



الشكل (13-2)

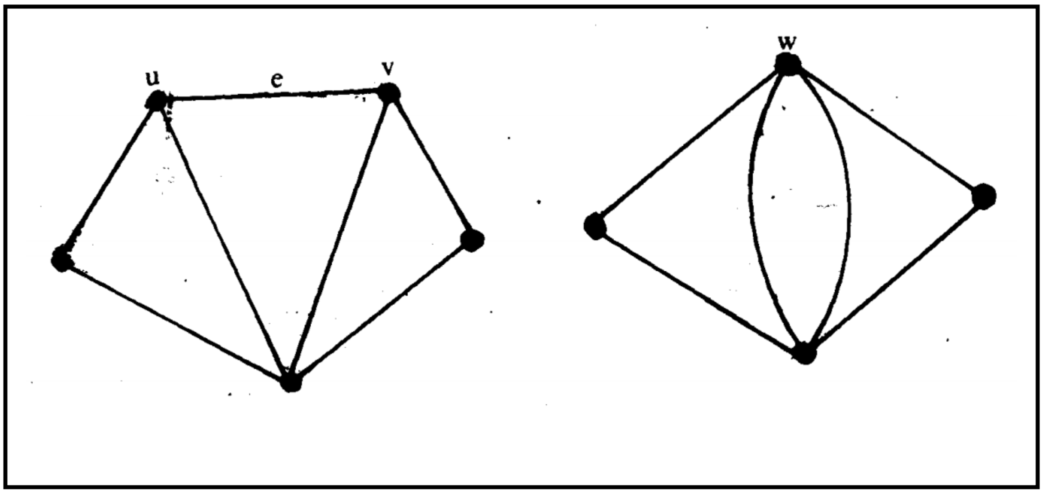
المبرهنة2.13: مبرهنة كورتوفسكي (1930)

يكون البيان G مستويا إذا وإذا فقط لا يحتوي البيان G على بيان جزئي يكافيء توبولوجيا K_5 أو $K_{3,3}$.

البرهان غير مطلوب.

هنا نحتاج الى تعريف مفهوم الانكماش (the contraction) . إنكماش حافة في بيان G هو عملية ازالة الحافة ، e = [u,v] ، من G ، ثم تطابق رأسيها ، u و v ، بحيث ان الرأس الناتج ، w ، يقع على كل الحافات التي كانت واقعة على u أو v ماعدا الحافة e [انظر الشكل ، 13-3] . يقال ان G قابل للانكماش (contractible) الى G' (أو G' هومنكمش G)

إذا أمكن الحصول على البيان يمين الشكل (13-3) من البيان الذي على يسار الشكل (13-3) ، وذلك بإجراء انكماشات متعاقبة لبعض حافات البيان.



الشكل (13-3)

المبرهنة 4.12: يكون البيان G مستويا إذا وإذا فقط لا يحتوي البيان G على بيان جزئي قابل للانكماش إلى K_5 أو $K_{3,3}$.

البرهان غير مطلوب.

تمارين :

1. استخدم مبرهنة كورتوفسكي لإثبات أن بيان بيترسن غير مستو .
2. أثبت أن التكافؤ التوبولوجي هو علاقة تكافؤية
3. هل البيان $K_{3,3}$ قابل للانكماش إلى K_4 .
4. عرف التكافؤ التوبولوجي والانكماش مع أعطاء مثال لكل واحد.
5. هل البيان Q_4 يكافئ تبولوجيا K_5 أو $K_{3,3}$.