الاثنينية (The Duality):

هناك وسائل أخرى لمعرفة البيانات المستوية أم لا، حيث ظهرت بعد ما أعطى كورتوفسكي مبرهنته ، منها الاثنينية وقد عبر Whitney عن استواء بيان ما بدلالة وجود بيان اثنيني له.

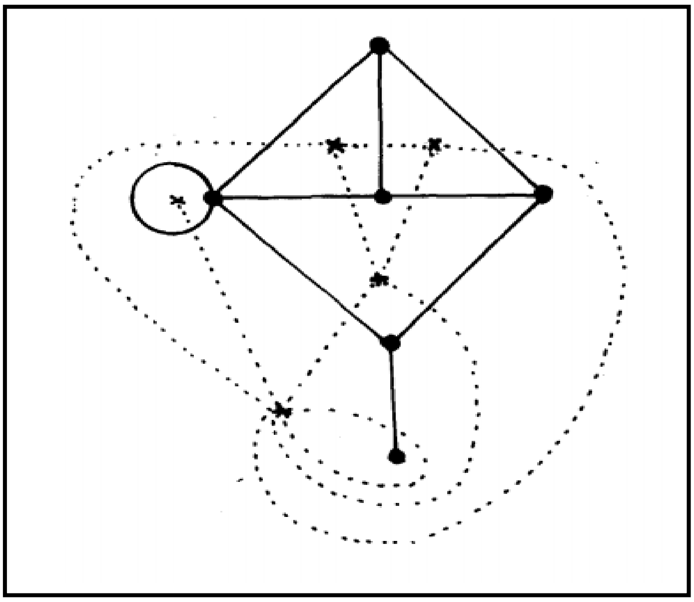
ليكن G بياناً مغموراً في المستوي (أي انه مرسوم في المستوي بدون ان يكون هنالك تقاطعات بين المنحنيات الممثلة لحافاته). ننشيء بياناً G_g^* . نطلق عليه اثنيني– هندسي (geometric - dual) للبيان G . بالخطوتين :

(أ) نختار نقطة واحدة. v_i^* . داخل كل وجه F_i (ومن ضمنها الوجه الخارجي) للبيان المستوي G . هذه النقاط هي رؤوس G_g^* .

(ب) مقابل كل حافة e_k في G نرسم خطاً e_k^* يقطع e_k (وبحيث لايقطع أية حافة أخرى)ويصل الرأسين v_i^* و v_j^* اللذين يقعان داخل الوجهين F_i و F_j (لايشترط ان يكونا مختلفين) اللذين يشترك تخماهما بالحافة e_k . هذه الخطوط هي حافات G_g^* .

وتوضيحاً للاثنيني– الهندسي. أنظر الشكل (14-1) الذي فيه بيان مستوٍ G مع الاثنيني– الهندسي له G_g^* . وقد مثّلت رؤوسه بعلامات × وحافاته بخطوط منقطة

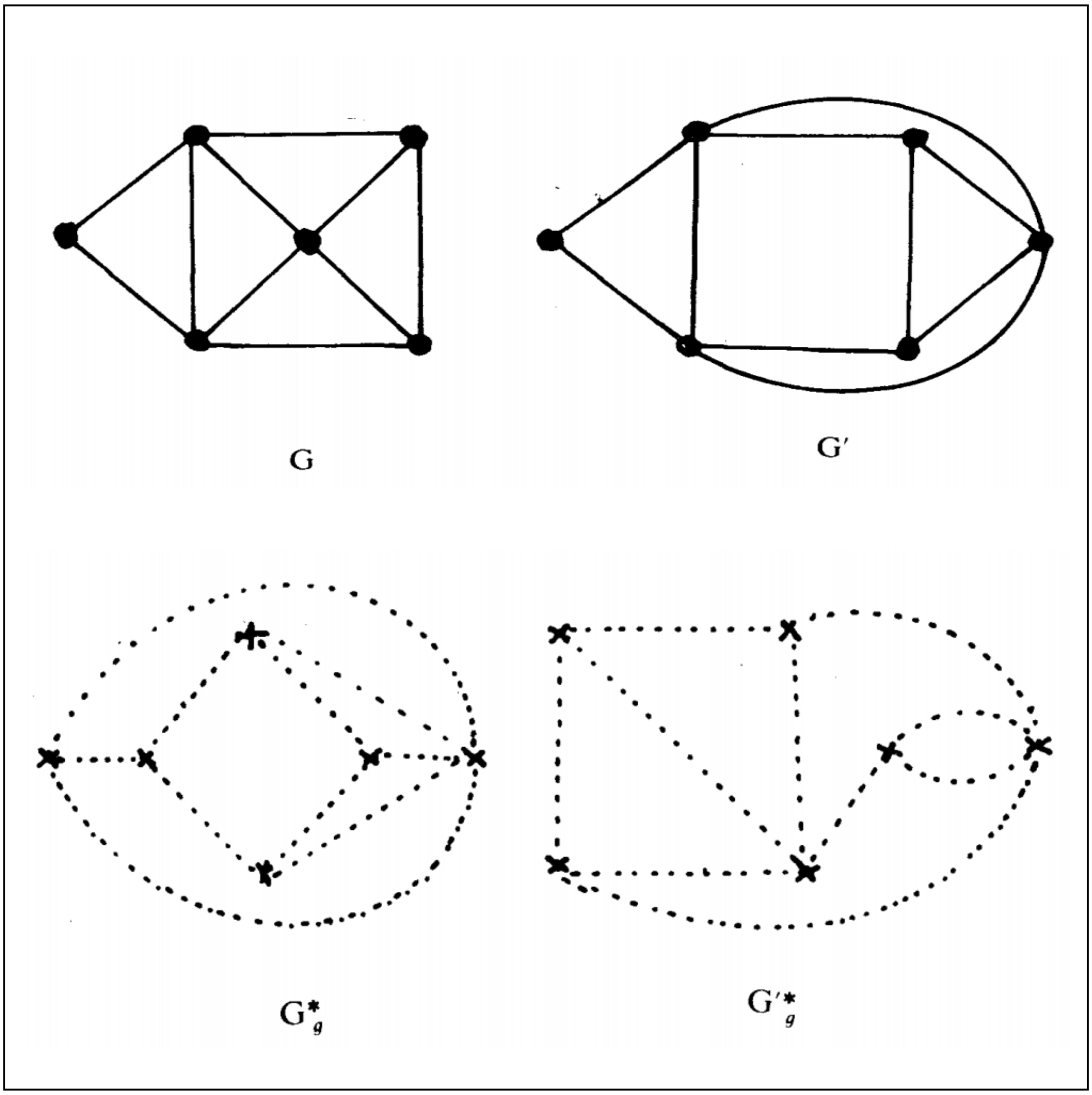
لاحظ أن كل برزخ في G يقابل لفة في G_g^* . وأن كل لفة في G تقابل برزخاً في G_g^*



الشكل (14-1)

كما أن G_g^* يحتوي على حافات مضاعفة اذا واذا فقط إحتوى G على وجهين يشترك تخماهما بحافتين على الأقل.

نؤكد أن الاثنيني – الهندسي G_g^* يعتمد مباشرة على غمر معين لـ G في المستوي. فاذا غمر G في المستوي بشكل مخالف أصبح بيانه الاثنيني – الهندسي مختلفاً عن سابقة. فاذا كان G و G' بيانين مستويين متشاكلين. فليس ضرورياً أن يكون G_g^* وG'^*_g متشاكلين كما هو مبين في الشكل (2-14). من جهة أخرى. إذا كان كل من G_g^* و $G_g^{*\prime}$ اثنيني – هندسي لنفس التمثيل المستوي لبيان G. فان G_g^* و $G_g^{*\prime}$ متشاكلان.



الشكل (2-14)

من عملية إنشاء البيان الاثنيني – الهندسي G_g^* لبيان مستوٍ G . نستنتج ان G_g^* يكون مستوياً أيضاً. واذا قيل ان للبيان G إثنيني هندسي G_g^* . فان هذا يعني ان G بيان مستوٍ. لانه بموجب التعريف لايمكن ان يكون للبيان G إثنيني –هندسي إلاّ اذا كان مستوياً. اضافة الى ذلك . فان G_g^* يكون متصلاً دائماً سواء كان G متصلاً أو غير متصل. كما إنه اذا كان عدد الرؤوس . وعدد الحافات . وعدد الاوجه للبيان المستوي G هي . على الترتيب f, m, n . وللاثنيني – الهندسي هي f^*, m^*, n^* فان

$$m^* = m, \qquad n^* = f.$$

وباستعمال صيغة أويلر. نجد ان

$$f^* = n .$$

يمكن تلخيص هذه العلاقات البسيطة في المأخوذة الآتية.

مأخوذة (1.14) : ليكن G_g^* الاثنيني – الهندسي لبيان مستوٍ G . فان G_g^* بيان متصل مستوٍ. وان

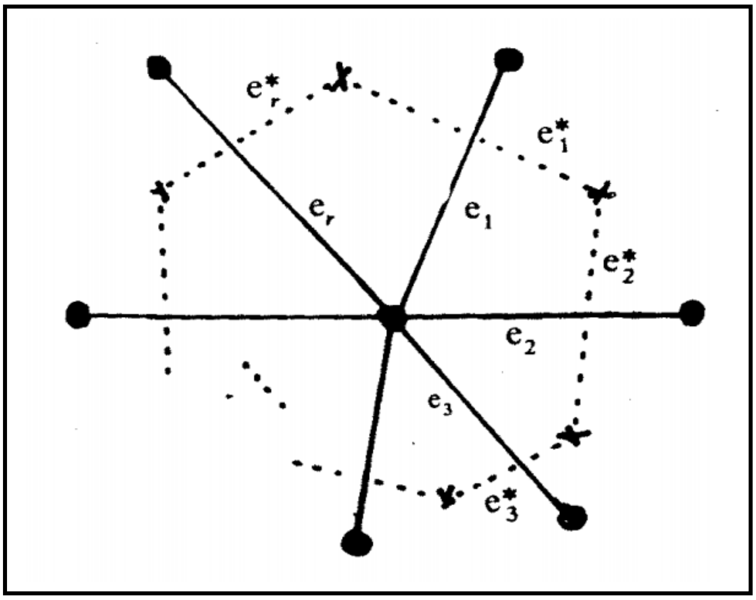
$$m^* = m, \qquad n^* = f, \qquad f^* = n,$$

من النتائج البسيطة الأخرى للاثنينية – الهندسية. المبرهنة التالية .

مبرهنة (2.14) : اذا كان G بياناً متصلاً مستويا . وكان G_g^{**} الاثنيني الهندسي لـ G_g^* . فان G_g^{**} متشاكل مع G .

البرهان : بموجب المأخوذة(4 - 2) يكون G_g^* متصلاً ومستوياً . ولذلك فان لـ G_g^* بياناً إثنينياً – هندسياً . G_g^{**} .

اذا كان v أي رأس في G وكانت $e_1, e_2, \dots, e_r$ الحافات الواقعة على v بترتيب مثلاً . إتجاه حركة عقرب الساعة حول v . عندما يكون مغموراً في المستوي في هيئة استخراج G_g^* منه. فان كلاً من هذه الحافات تشترك في وجهين متجاورين [انظر الشكل (3-14)]. وبذلك . فان الحافات المقابلة $e_1^*, e_2^*, \dots, e_r^*$ تشكل دارة بسيطة في G_g^* وتحصر وجهاً واحداً منه. من جهة اخرى. وبموجب المأخوذة (1.14) . فان $f^* = n$. وهكذا. فان كل وجهفي G_g^* يحوي في داخله رأساً واحداً فقط من رؤوس G . وعليه. يمكن الحصول على G من G_g^* بعكس عملية إستخراج G_g^* من G ، وبذلك فان G هو إثنيني – هندسي لـ G_g^* . أي أن. G_g^{**} متشاكل مع G .



الشكل (14-3)

مبرهنة (4.14) : ليكن G بياناً مستوياً . و G_g^* إثنينياً هندسياً لـ G ؛ عندئذ . مجموعة من حافات G تشكل دارة بسيطة في G اذا واذا فقط مجموعة الحافات المقابلة لها في G_g^* تشكل مجموعة قاطعة في G_g^* .

البرهان غير مطلوب.

نتيجة (5.14) : ليكن G بياناً مستوياً ، و G_g^* اثنينياً هندسياً لـ G ؛ عندئذ ، مجموعة من حافات G تشكل مجموعة قاطعة لـ G اذا واذا فقط مجموعة الحافات المقابلة لها في G_g^* تشكل دارة بسيطة لـ G_g^*

تمارين :

1. عرف الاثنيني الهندسي وأعطي مثال على ذلك.
2. جد الاثنيني لبيان المكعب Q_3.
3. هل نستطيع أيجاد الاثنيني للبيان $K_{3,3}$ ، وضح ذلك .
4. برهن النتيجة أعلاه 5.14.
5. يقال للبيان G أنه اثنيني ذاتي، إذا كان متشاكلا مع الاثنيني الهندسي G_g^*، فهل البيان W_5 اثنيني ذاتي.