تلوين البيانات Coloration of Graphs:

لقد كان لمسالة الالوان الأربعة (Four – colour problem) أثر كبير في تطوير موضوع تلوين البيانات بشكل خاص وموضوع نظرية البيانات بشكل عام . فمنذ ان ظهرت هذه المسألة قبل مايزيد على قرن من الزمن ، والباحثون المتخصصون في نظرية البيانات يحاولون أن يجدوا لها حلاً . ففي أثناء محاولاتهم هذه يجدون مفاهيم ومبرهنات ومسائل جديدة في موضوع نظرية البيانات . مما أدى الى تطور هذا الموضوع وتوسعه . ولهذا نجد من الضروري التأكيد على هذه المسألة التي حلت أخيراً في سنة ١٩٧٦ .

هنالك ثلاثة أنواع من مسائل التلوين ، وهي مسائل تلوين الرؤوس و تلوين الأوجه لبيانات المستوية وتلوين الحافات:

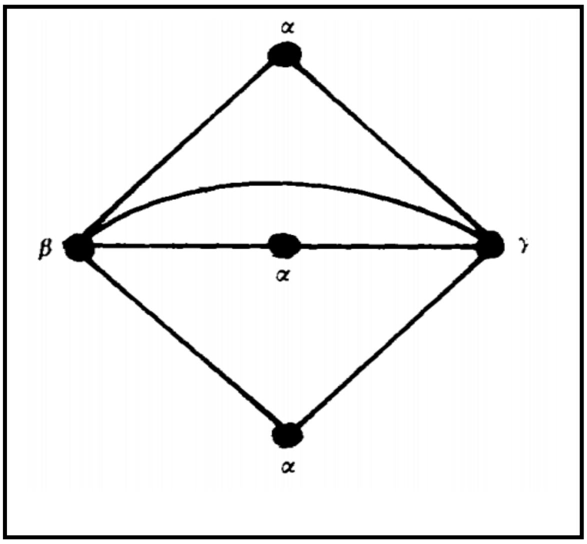
تلوين الرؤوس Coloration of Vertices :

ليكن G بياناً بسيطاً يقال أن G قابل التلوين - k للرؤوس إذا كان بالامكان تعيين لون واحد من k من الالوان لكل رأس من رؤوس G بحيث لايوجد رأسان متجاوران لهما نفس اللون . وبمعنى آخر . فان رؤوس G قابلة التلوين بـ k من الالوان المختلفة اذا امكن تجزئة مجموعة رؤوسه V الى k من المجموعات الجزئية $V_1 , V_2 , \ldots , V_k$ غير الخالية والمنفصلة مثنى مثنى . وأن

$$V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i \ .$$

بحيث أنه لاتوجد حافات في G تصل رأسين في نفس المجموعة الجزئية V_i. ويقال في هذه الحالة أن مجموعة الرؤوس V_i لكل $i = 1,2,\ldots,k$. مستقلة في G.

اذا كان G قابل التلوين - k للرؤوس ولكنه غير قابل التلوين - $(k - 1)$ للرؤوس . فيقال إن G تلويني - k (k – chromatic) للرؤوس . أو ان عدد تلوين رؤوس G هو k . ويرمز عادة لعدد تلوين رؤوس البيان G بالرمز $\chi(G)$ وعليه . فان $\chi(G)$ هو أصغر عدد صحيح موجب بحيث ان G قابل التلوين ـ $\chi(G)$ للرؤوس . فمثلاً . البيان في الشكل (1-15) هو تلويني - 3 للرؤوس . وقد رمز للالوان بالحروف اليونانية α, β, γ . بالطبع . فان هذا البيان قابل التلوين - k للرؤوس لكل $3 \leq k \leq 5$



الشكل (1-15)

عندما نتكلم على تلوين الرؤوس ، سنفترض دائماً أن البيانات بسيطة ، أي خالية من اللفات والحافات المضاعفة . كما نفرض أنها متصلة . لأن هذه كلها ليست ذات تأثير على تلوين الرؤوس.

من الامور التي تتبادر الى الذهن مباشرة كيفية إيجاد $\chi(G)$ لبيان كيفي G . يمكن معرفة عدد تلوين الرؤوس لبعض البيانات الخاصة مباشرة. فمثلاً.

$$\chi(K_n) = n, \qquad \chi(K_{m,n}) = 2.$$

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 3 & \text{عندما n فردي ،} \\ 4 & \text{عندما n زوجي ؛} \end{cases}$$

من الامور الواضحة جداً أنه اذا كان G بياناً غير خال من الحافات ، فان $\chi(G) = 2$ اذا واذا فقط G ثنائي التجزئة.

ملاحظة : إذا كان عدد رؤوس البيان G هو n ، فأن $\chi(G) \le n$ ، وإذا كان K_r بيان جزئي من G فأن $\chi(G) \ge r$. من هذا نستنتج وجود علاقة بين درجات رؤوس بيان G والقيد الأعلى لعدد تلوين الرؤوس.

مبرهنة 1.15 : إذا كان p الدرجة العليا لرؤوس بيان G، فأن G قابل للتلوين- $(p+1)$ للرؤوس.

البرهان: نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس. واضح أن المبرهنة صحيحة اذا كان $n = 0,1$. والآن نفرض أنها صحيحة لكل بيان ذي $(n - 1)$ من الرؤوس.

ليكن G بياناً عدد رؤوسه n. وان أعلى درجة لرؤوسه هي p . ليكن v أي رأس في G . وليكن G' البيان الحاصل من G بازالة الرأس v مع كل الحافات الواقعة عليه. لما كان عدد رؤوس G' هو $(n - 1)$ وان أعلى درجة لرؤوسه لاتزيد على p، فان G' قابل التلوين $-(p + 1)$ للرؤوس. بموجب فرض الاستقراء الرياضي. ولما كان عدد الرؤوس المجاورة للرأس v في G لايزيد على p. فانه بالامكان إعطاء لون الى v يختلف عن الالوان المعطاة للرؤوس المجاورة له في تلوين G' . ويؤدي ذلك الى تلوين رؤوس G بما لايزيد على $(p + 1)$ وهكذا فان G قابل التلوين $(p + 1)$ للرؤوس.

انتهى البرهان.

مبرهنة **2.15**: إذا كان G بيانا بسيطا متصلا غير تام ، وكانت p أعلى درجة لرؤوسه ، $p \geq 3$ ، فأن G قابل التلوين $- p$ للرؤوس.

البرهان غير مطلوب .

الآن نقدم المبرهنة التي تتعلق بتلوين رؤوس البيانات المستوية ، ويطلق عليها مبرهنة الألوان الخمسة، والتي تعود إلى العالم (**Heawood**).

مبرهنة **3.15** : كل بيان مستو قابل التلوين-5 للرؤوس.

البرهان غير مطلوب .

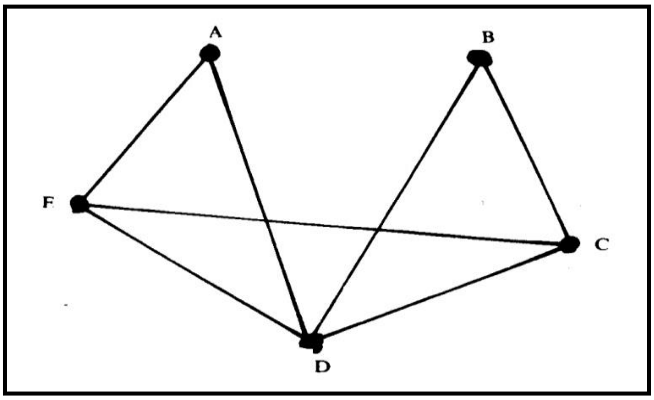
مثال1 : ترغب وزارة التربية بوضع خطة تتضمن بناء ثلاث مدارس ابتدائية ومتوسطة و إعدادية في خمسة نواحي . وكانت الخطة تنص على بناء واحدة فقط من المدارس الثلاثة في كل ناحية من النواحي الخمس ، بحيث أنه إذا كانت

المسافة بين أي ناحيتين مختلفتين أقل أو يساوي **10** كيلومترات فلا تبنى مدرستان متشابهتان في هاتين الناحيتين، فإذا كانت المسافات بين هذه النواحي معطاة في الجدول أدناه فهل يمكن تنفيذ هذه الخطة.

	A	B	C	D	E
A		12	15	8	7
B	12		6	9	14
C	15	6		10	9
D	8	9	10		8
E	7	14	9	8	

الحل : نمثل كل ناحية برأس . واذا كانت المسافة بين الناحيتين أقل أو تساوي 10 كيلومترات نصل الرأسين الممثلين لهما بحافة . فنحصل على البيان المبين في الشكل (2-15) فاذا كان بالامكان تلوين رؤوس هذا البيان بثلاثة الوانمختلفة . فانه يمكننا تنفيذ الخطة باعتبار ان كل لون يمثل بناء احد المرافق الخمسة .

مثلا : بناء مدرسة ابتدائية في كل من الناحيتين A و C وبناء متوسطة في كل من الناحيتين B و E وبناء إعدادية في الناحية D . كما موضح بالشكل **(2−15)**.



الشكل (2−15)

تمارين :

1. ليكن C_n دارة بسيطة عدد رؤوسها n ، جد $\chi(C_n)$.

2. جد $\chi(G)$ عندما G شجرة برتبة n .

3. إذا كان العدد اللوني لبيان G هو k، فأثبت أن G يحتوي على بيان جزئي حرج (يقال للبيان G أنه بيان حرج إذا كانت عملية إزالة أي رأس منه مع الحافات الواقعة عليه تقلل من عدد تلوين الرؤوس)، عدد تلوين رؤوسه هو k أيضا.

4. حل المثال المعطى في نهاية المحاضرة عندما يكون جدول المسافات بين النواحي كما هو مبين بالجدول أدناه.

	A	B	C	D	E
A		11	8	7	6
B	11		7	10	16
C	8	7		8	$9\frac{1}{2}$
D	7	10	8		10
E	6	16	$9\frac{1}{2}$	10	

5. إذا كان G بيانا بسيطا منتظما درجته d وعدد رؤوسه n، فأثبت أن $\chi(G) \geq n/(n-d)$.