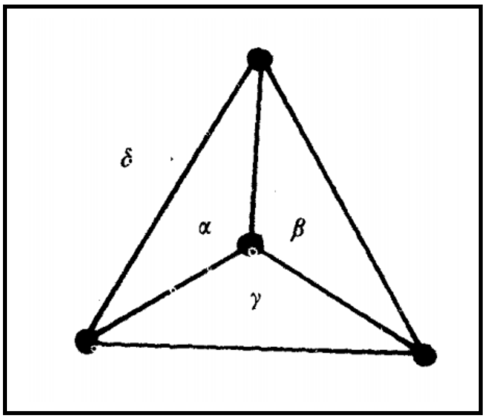
تلوين الأوجه(تلوين الخرائط) Coloration of Faces(Coloration of Maps):

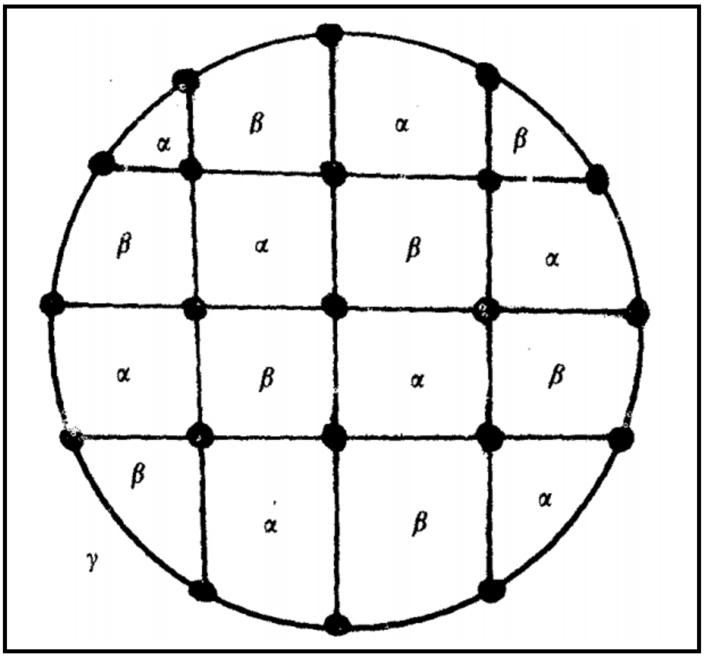
لقد برزت مسألة الألوان الأربعة من خلال تلوين الخرائط الجغرافية ، فمن الطبيعي الاستفسار عن أقل عدد من الألوان التي نحتاج إليها من خلال تلوين خارطة معطاة بحيث أية منطقتين متجاورتين في تلك الخارطة تلونان بلونين مختلفين.
لقد لوحظ أن أربعة ألوان كافية دائما لذلك ، ولكن لم يستطيع أحد إثبات هذه الحقيقية حتى عام 1976 ، للإطلاع على المزيد من المعلومات حول هذا الموضوع راجع المصدر[1] الفقرة (3.5) ، أما لان سوف نستعرض بشكل عام ومختصر قضية تلوين أوجه بيان مستو G ، ونثبت العلاقة بين هذا التلوين وتلوين الرؤوس الاثنيني – الهندسي.

لاجل صياغة عبارات دقيقة ، يجب علينا تعريف « الخارطه » . تعرف الخارطة (map) على انها سطح S مع بيان خال من البرازخ مغموروفي S ؛ قد يكون السطح S هو المستوي او اي سطح مغلق قابل للتوجيه . وعندما يغمر البيان G في السطح S ، فان S يتجزأ الى مناطق يطلق عليها أوجه الخارطة (أو أوجه البيان G . عندما يكون السطح هو المستوي ، فاننا نقول للخارطة بانها خارطة مستوية .

يقال لخارطة M أنها قابلة التلوين ـ k للاوجه اذا أمكن تلوين أوجهها بما لايزيد على k من الالوان المختلفة بحيث ان كل وجهين متجاورين (اي يشترك تخماهما بحافة) لهما لونان مختلفان . ويعرف عدد التلوين لاوجه خارطة M ، والذي يرمز له $\phi(M)$ ، بانه اصغرعدد k بحيث ان M قابلة التلوين – k للاوجه . فمثلاً ، عدد التلوين لاوجه الخارطة المستوية المعطاة في الشكل (16-1) هو 4 ؛ وعدد التلوين لاوجه الخارطة المستوية المعطاة في الشكل (16-2) هو 3 .



الشكل (16-1)



الشكل (16-2)

من مفهوم الاثنينية الهندسية للبيانات المستوية ، نحصل على المبرهنة الآتية التـــي تعطينا تلوين أوجه خارطة مستوية G من تلوين الرؤوس للاثنيني – الهندسي لـ G .

مبرهنة (1.16) : ليكن G بيانا متصلاً مستوياً خالياً من البرازخ ، وليكن G_g^* الاثنيني الهندسي لـ G ؛ عندئذ تكون الخارطة المستوية G قابلة التلوين – k للاوجـه اذا واذا فقط G_g^* قابل التلوين – k للرؤوس .

البرهان : بما أن G خال من البرازخ ، فان G_g^* خال من اللفات .

لنفرض ان الخارطة المستوية G قابلة التلوين – k للاوجه . بما أن كل وجه في G يحتوي في داخله على رأس واحد فقط من رؤوس G_g^* ، فانه يمكننا تلوين رؤوس G_g^* بنفس ألوان الاوجه التي تقع في داخلها . من عملية انشاء الاثنيني الهندسي G_g^* من G . فان رأسين u و v متجاوران في G_g^* اذا واذا فقط كان الوجهان المقابلان لهما في G متجاورين . لذلك ، فان كل رأسين متجاورين في G_g^* لهما لونين مختلفين . وعليه ، فان G_g^* قابل التلوين– k للرؤوس . بنفس الوان أوجه الخارطة المستوية G.

وبطريقة مماثلة تماماً ، نثبت انه اذا كان G_g^* قابل التلوين – k للرؤوس ، فان الخارطة المستوية G قابلة التلوين – k للاوجه .

انتهى البرهان

نستنتج من هذه المبرهنة ان أية مبرهنة في موضوع تلوين الرؤوس للبيانات المستوية الخالية من اللفات يقابلها مبرهنة اثنينية في موضوع تلوين الاوجه للخرائط والعكس بالعكس ؛ كما سوف نبين في المبرهنات الآتية .

مبرهنة (2.16) : خارطة مستوية G قابلة التلوين –2 للاوجه اذا واذا فقط G بيان أويلري .

البرهان : ليكن G_g^* الاثنيني الهندسي لـ G . بموجب المبرهنة (1.16) ، G قابلة التلوين –2 للاوجه اذا واذا فقط G_g^* قابل التلوين –2 للرؤوس . كما ان G_g^* قابل التلوين –2 للرؤوس اذا واذا فقط G_g^* ثنائي التجزئة . ولما كان G_g^* بياناً مستوياً ، (لأن إذا كان G بيانا مستويا ثنائي التجزئة ، فأن الاثنيني الهندسي G_g^* يكون أويلريا والعكس صحيح).

إذا يكون G_g^* ثنائي التجزئة إذا وإذا فقط كان G بيانا أويلريا.

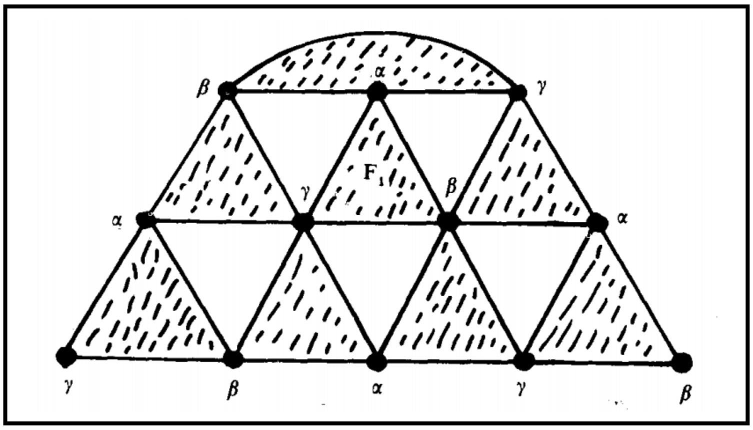
انتهى البرهان.

مبرهنة (3.16) :– مبرهنة الالوان الثلاثة –

لتكن G خارطة مستوية تكعيبية ؛ عندئذ تكون G قابلة التلوين –3 للاوجه اذا واذا فقط أطوال نخوم أوجه G أعداد زوجية .

البرهان : تعرف الخارطة التكعيبية بأنها خارطة درجة كل رأس فيها هي 3
لنفرض ان الخارطة المستوية G قابلة التلوين -3 للاوجه . فاذا كان F أي وجه في G ، فان تخم F يشترك مع تخم كل وجه مجاور له بحافة واحدة فقط (لان G تكعيبي) فاذا كان F ملوناً باللون α ، فان الاوجه المجاورة لـ F تكون ملونة بـ β أو γ على التناوب ، ولذلك فان عددها يجب ان يكون زوجياً . اضافة الى ذلك ، لايوجد وجه يشترك مع F برأس واحد فقط ، لان خلاف ذلك يجعل درجته اكثرمن 3 . لذلك ، فان طول تخم F هو عدد زوجي .

والآن نفرض ان G خارطة مستوية تكعيبية تخوم أوجهها ذات أطوال زوجية . عندئذ ، تكون درجة كل رأس في G_g^* زوجية ، وكل وجه في G_g^* هو مثلث ، علماً ان G_g^* هو الاثنيني الهندسي لـ G . وعليه ، فان G_g^* بيان أويلري . وهكذا ، بموجب المبرهنة (2.16) ، فان الخارطة المستوية G_g^* قابلة التلوين – 2 للاوجه ، مثلاً . باللونين الأسود والأبيض . بقي أن نثبت امكانية تلوين رؤوس G_g^* بثلاثة الوان . α, β, γ
نبدأ أولاً باي وجه ، F_1 ، ملون بالاسود ، ونلون رؤوسه الثلاثة بـ α, β, γ مرتبة باتجاه حركة عقرب الساعة حول F_1 . ثم نلون رؤوس كل وجه ملون بأسود ومشترك برأس مع الوجه F_1 بالالوان α, β, γ مرتبة باتجاه حركة عقرب الساعة حول ذلك الوجه . وهكذا يمكننا الاستمرار بأخذ الاوجه السود التي تحيط بوجه سبق أن لونت رؤوسه . [انظر الشكل (3-16) .] وبذلك يمكننا تلوين رؤوس G_g^* بالالوان الثلاثة α, β, γ . وعليه بموجب المبرهنة (2.16) ، فان الخارطة المستوية G قابلة التلوين – 3 للاوجه . وبهذا يتم البرهان



الشكل 3-16

مبرهنة الالوان الاربعة :

ظهرت مسألة الالوان الاربعة قبل مايزيد على قرن من الزمن ولقد كتبت مقالات كثيرة عن تاريخ نشأتها . وقد حاول العديد من علماء الرياضيات ومعظم المختصين في نظرية البيانات حلها . أي اثبات صحتها أواثبات عدم صحتها . ولقد أخذت تلك المحاولات الكثير من وقت وجهود العلماء الذين حاولوا حلها . حتى سماها البعض « مرض الالوان – الاربعة » . وكانت الرغبة في حلها تنتقل من الاستاذ الى طلبته . واحياناً من الوالد الى ولده . وقد يكون السبب الرئيسي لذلك هوبساطة فحواها . مما يجعل المتعرف عليها يعتقد بسهولة حلها .

ينص تكهن الالوان – الاربعة على : « كل خارطة مستوية قابلة التلوين - 4 للاوجه » ؛ أي أن أربعة الوان كافية دائماً لتلوين أوجه أية خارطة مستوية بحيث ان كل وجهين متجاورين يلونان بلونين مختلفين . »

تمارين :

1. أثبت أن كل خارطة مستوية قابلة التلوين-5 للأوجه.
2. لتكن G خارطة مستوية عدد رؤوسها n وعدد حافاتها m وعدد أوجهها f ودرجة كل رأس فيها لا تقل عن 3. أثبت $3f \geq m+6$.
3. أذكر نصي مبرهنة الألوان الثلاثة والأربعة وما الفرق بينهما.
4. إذا علمت أن عدد تلوين رؤوس بيان G لا يقل عن 5 ، فأثبت أن G يحتوي على بيان جزئي يكافئ تبولوجيا K_5 أو $K_{3,3}$.
5. استخدم ما لا يزيد عن أربعة ألوان لتلوين رؤوس البيان في الشكل أدناه.