تلوين الحافات Coloration of Edges:

لقد كانت الغاية من دراسة تلوين الحافات الوصول الى حل غير مباشر لمسألة الالوان الاربعة ، كما سوف نلاحظ ذلك في مبرهنة تيت (P. Tait) ، التي تنص على تكافؤ تكهن الالوان الاربعة مع تكهن بخصوص تلوين الحافات للخرائط التكعيبية بما لايزيد على ثلاثة الوان .

سنفترض في هذا البند أن البيانات التي سنعالجها لاتحتوي على لفات . بصورة عامة ، يمكن ان تحتوي هذه البيانات على حافات مضاعفة .

يقصد بتلوين الحافات لبيان G تعيين الوان لحافات G بحيث أن كل حافتين متجاورتين لهما لونان مختلفان . ويقال أن G قابل التلوين – k للحافات اذا امكن تلوين حافاته بما لايزيد على k من الالوان المختلفة . وإذا كان $\overline{G}$ قابل التلوين – k للحافات ولكنه ليس قابل التلوين – (k − 1) للحافات ، فيقال ان عدد تلوين حافاته G هو k ، ونرمز لهذا العدد بالرمز $\varepsilon(G)$.

واضح أنه اذا كان G قابل التلوين – k لحافات ، فانه يمكن تجزئة مجموعة حافات G الى k من المجموعات الجزئية غير الخالية والمستقلة (اي أن حافاتها غير متجاورة بعضها مع بعض) .

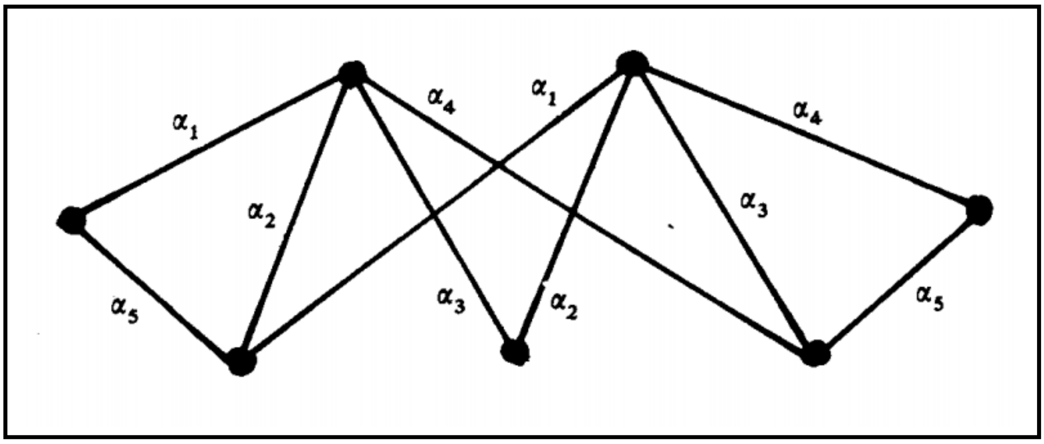
لقد أعطي في الشكل (1-17) بيان G قابل التلوين – 5 للحافات ، ويمكن للقارىء أن يبين أن $\varepsilon(G) = 4$ ، وقد رُمز للالوان بـ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$.
واضح أن لكل رأس في البيان G ،

$$\varepsilon(G) \geqq \rho(v) .$$

وبذلك ، فان

$$\varepsilon(G) \geqq p,$$

حيث أن p هي الدرجة العليا لرؤوس G .



الشكل (17-1)

مبرهنة (1.17): عدد تلوين حافات البيان التام من الرتبة n ، هو

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1, & \text{عندما يكون n زوجياً} \\ n, & \text{عندما يكون n فردياً} \end{cases}$$

سنرمز للبيان الثنائي التجزئة الذي مجموعتا رؤوسه المستقلتان هما V_1 و V_2 بالرمز $G(V_1, V_2)$

يعرف التام من V_1 الى V_2 في $G(V_1, V_2)$ بأنه تباين متقابل بين V_1 ومجموعة جزئية من V_2 بحيث ان الرؤوس المتقابلة متجاورة. واضح ان وجود تام من V_1 الى V_2 في $G(V_1, V_2)$ يعني وجود مجموعة مستقلة من حافات $G(V_1, V_2)$ بحيث ان كل رأس في V_1 واقع على واحدة فقط من تلك الحافات في المجموعة المستقلة. بطبيعة الامر ، ان وجود تزاوج تام من V_1 الى V_2 يعني ان $|V_1| \leq |V_2|$ ، أي ان عدد رؤوس V_1 لايزيد على عدد رؤوس V_2 .

مبرهنة(2.17): يوجد تزاوج تام من V_1 الى V_2 في البيان الثنائي التجزئة البسيط $G(V_1, V_2)$ اذا واذا فقط

$$|A| \leq |\phi(A)|,$$

لكل مجموعة جزئية A من V_1 ، حيث أن $\phi(A)$ مجموعة كل الرؤوس في V_2 التي يكون كل منها متجاور مع رأس واحد على الاقل من الرؤوس في A .

نتيجة (3.17): اذا كان البيان الثنائي التجزئة $G(V_1, V_2)$ بسيطاً ومنتظماً بدرجة h . وأن $|V_1| = |V_2| = n$. فانه توجد في $G(V_1, V_2)$ مجموعة مكونة من n من الحافات المستقلة . في حقيقة الامر . كل رأس في $G(V_1, V_2)$ واقع على واحدة فقط من هذه الحافات المستقلة .

البرهان : لما كان $G(V_1, V_2)$ منتظماً بدرجة h ، فان لكل مجموعة جزئية A من رؤوس V_1 ، يكون مجموع درجات رؤوس A هو $h|A|$. اذا كانت $\phi(A)$ مجموعة الرؤوس في V_2 التي كل منها متجاور مع رأس واحد على الاقل من رؤوس A ، فان

$$|\phi(A)| \geqq h|A|/h = |A|,$$

لان درجي كل رأس هي h . وعليه ، فان $G(V_1, V_2)$ يحقق شرط المبرهنة( ) ، وبذلك يوجد تزاوج تام ، أي توجد مجموعة مكونة من n من الحافات المستقلة.

انتهى البرهان

نتيجة(4.17): اذا كان $G(V_1, V_2)$ بياناً ثنائي التجزئة ، وان p هي الدرجة العليا لرؤوسه ، فان هنالك مجموعة مستقلة من حافات $G(V_1, V_2)$ بحيث أن كل رأس بدرجة p يقع على واحدة من هذه الحافات .

مبرهنة (5.17) : إذا كان البيان الثنائي التجزئة G بسيطا ، وكانت p الدرجة العليا لرؤوسه ، فأن $\varepsilon(G) = p$.

البرهان : نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي على m عدد حافات G.

واضح أن المبرهنة صحيحة اذا كان $m = 1$ ؛ ولنفرض انها صحيحة لكل بيان ثنائي التجزئة الذي عدد حافاته أقل من m . ولنأخذ البيان G الثنائي التجزئة الذي عدد رؤوسه m . بموجب النتيجة(4.17)، توجد مجموعة E من الحافات المستقلة بحيث أن كل رأس بدرجة p يقع على واحدة فقط من هذه الحافات المستقلة . ليكن G' البيان الثنائي التجزئة الناتج من G بازالة كل حافات E . واضح أن$(p - 1)$ هي الدرجة العليا لرؤوس G' . ولما كان عدد حافات G' هو $|E| - m$. فانه بموجب الاستقراء الرياضي .

يكون

$$\varepsilon(G') = p - 1 .$$

وباعطاء لون جديد لكل من الحافات في المجموعة المستقلة . نستنتج أن

$$\varepsilon(G) \leq p .$$

وهكذا ، بموجب

$$\varepsilon(G) = p.$$

انتهى البرهان

نتيجة (5.17): برهن $\varepsilon(K_{n,m}) = \max\{n,m\}$.

مبرهنة (6.17) خارطة مستوية تكعيبية ، G ، يكون $\varepsilon(G) = 3$.

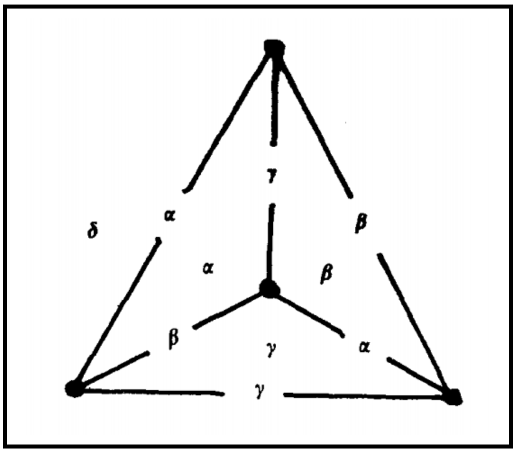
البرهان : لما كانت G خارطة مستوية ، فان G قابلة التلوين– 4 للاوجه .
دعنا نعبر عن الالوان الاربعة للاوجة بازواج مرتبة كالاتي :

$$\alpha = (1,0),\ \beta = (0,1),\ \gamma = (1,1),\ \delta = (0,0).$$

اذا كانت e حافة مشتركة بين تخمي وجهين احدهما بلون β والاخر بلون γ ، فاننا نعطي لـ e اللون $\beta + \gamma$ (معيار 2) ، أي α . وهكذا بالنسبة لكافة حافات G . ونظراً لعدم وجود برازخ في G ، فان الالوان التي سوف تستخدم لتلوين الحافات بهذه الطريقة هي α,β,γ ، كما موضح في الجدول الاتي :

$+$	α	β	γ	δ
α	$-$	γ	β	α
β	γ	$-$	α	β
γ	β	α	$-$	γ
δ	α	β	γ	$-$

بما أن G تكعيبي ، فانه عند كل رأس توجد ثلاثة أوجه متجاورة مثنى مثنى ، وعليه كل حافتين متجاورتين تقعان سوية على تخم وجه واحد فقط [انظر الشكل ( )]
وهكذا لايمكن أن تأخذ حافتان متجاورتان نفس اللون بهذه الطريقة . وبهذا يتم البرهان



الشكل (2-17)

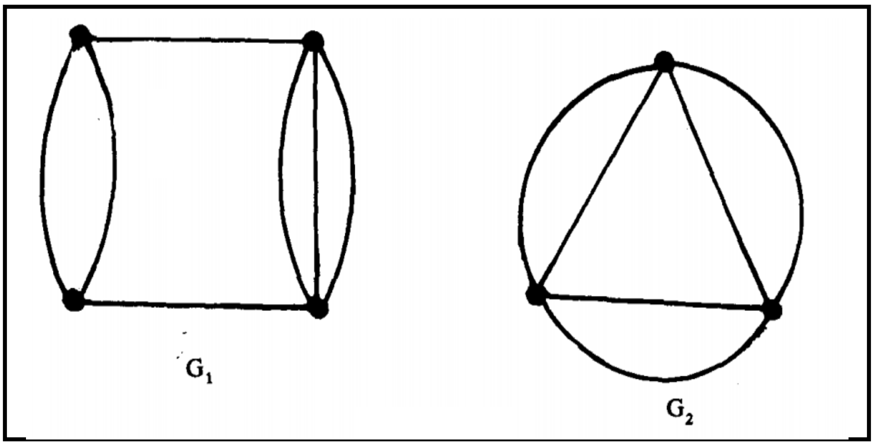
تمارين :

1. احسب عدد تلوين حافات البيان المعطى في الشكل (2-17) .

2. برهن $\varepsilon(K_{n,m}) = \max\{n,m\}$.

3. احسب عدد تلوين حافات بيان بيترسن.

4. جد عدد تلوين الحافات لكل من البيانين أدناه



5. ليكن G بيانا مضاعفا خالي من اللفات ، الدرجة العليا لرؤوسه هي 3. أثبت أن $\varepsilon(G)$ إما 3 أو 4.