## مفاهيم أساسية في نظرية البيان:

**البيان (Graph) G:** هو زوج مرتب من مجموعة غير خالية V من عناصر تسمى رؤوس (vertices) البيان مع مجموعة E من أزواج غير مرتبة من رؤوس متمايزة في البيان تسمى حافات (edges) البيان.

يطلق على كل عنصر من عناصر E بـ حافة ، ويطلق على Vمجموعة رؤوس البيان G ويرمز لها أحيانا بـ V(G) ، ويطلق على E مجموعة حافات البيان G ويرمز لها أحيانا بـE(G) . ونعبر أحيانا عن البيان G الذي مجموعة رؤوسه V ومجموعة حافاته E بالزوج المرتب (V,E) أي أن $G = (V,E)$.

لتكن e هي حافة {u,v}، فعندئذ نكتب $e = uv = vu$ ونقول أن الحافة e تصل الرأسين u وv، كما نقول أن الرأسين u وv متجاوران (adjacent)، وأن e واقعة (incident) على كل من الرأسين u وv، وإذا كانت $e_1$ و$e_2$ حافتين متمايزتين في البيان G وهما واقعتان على رأس مشترك فأن الحافتين $e_1$ و$e_2$ متجاورتان.

**الرأس المنعزل (isolated ):** هو الرأس الذي لا يقع على أية حافة .

رتبة البيان G هي بالتعريف$|V(G)|$وحجمه هو $|E(G)|$، وقد نرمز لرتبة البيان G بالرمز p(G) ولحجمه بالرمز q(G).

**بيان (p,q):** هو البيان الذي رتبته p (order) وحجمه q (size).

ليكن v هو أي رأس في البيان G، تعرف **درجة الرأس v (degree):** على أنها عدد الحافات الواقعة على الرأس v ويرمز لها بـ$\deg_G v$ أو اختصارا $\deg v$ .

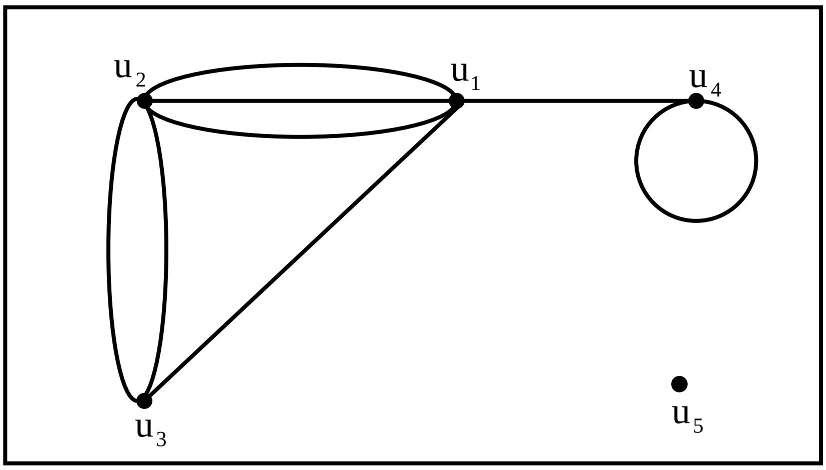
يقال أن هنالك **حافة مضاعفة (multiple edge)** بين الرأسين u و v في البيان G إذا كان هنالك أكثر من حافة واحدة تصل u و v ، وتسمى الحافة التي تصل نفس الرأس **باللفة (loop)** أي أن ( إذا كان v رأسا في البيان G فأن الحافة التي تقع على نفس الرأس هي $e = vv$).

يمكن تمثيل البيان G هندسيا في المستوي أو في الفراغ وذلك بتعين لكل رأس دائرة صغيرة صلدة أو مجوفة ، أما الحافة فتمثل بخط متصل بسيط لا يقطع نفسه إما على شكل مستقيم أو مقوس .

يمكن رسم أي بيان إذا أعطيت مجموعة رؤوسه ومجموعة حافاته كأزواج غير مرتبة كما موضح في المثال 1.

**مثال 1:** لتكن $V(G)=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ مجموعة رؤوس بيان ، ولتكن $E(G)=\{u_1u_2,u_1u_3,u_1u_2,u_1u_4,u_2u_3,u_2u_1,u_2u_3,u_4u_4\}$ مجموعة حافاته.

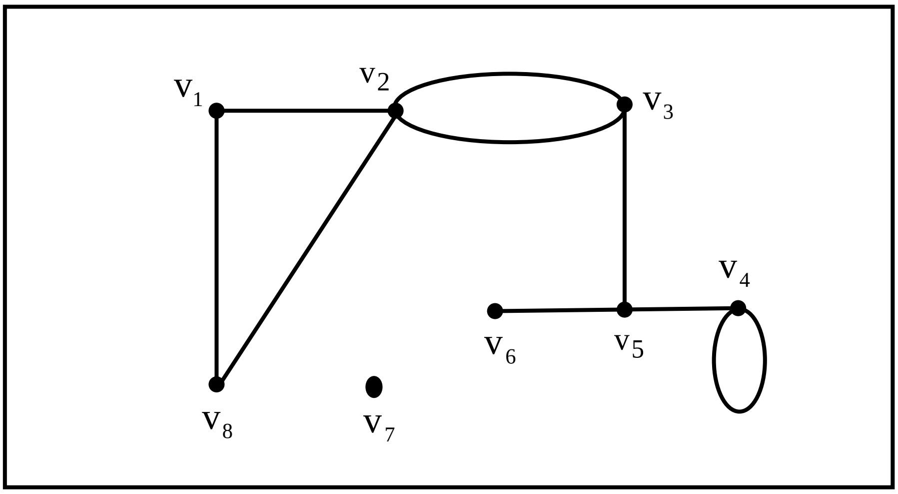
إذا يكون رسم البيان G موضح بالشكل2−1 .




**بالشكل2−1**

كما يمكن إيجاد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات إذا أعطي التمثيل الهندسي للبيان ، كما موضح في المثال 2 ، إذ أن التمثيل الهندسي يوضح في كثير من الأحيان التعاريف والمفاهيم ويفسر براهين بعض القضايا ويساعد في فهمها .

**مثال 2:** ليكن بيان G موضح بالشكل أدناه:




**الشكل 2−2 البيان G**

يمكن تمثيل كلا من مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات على شكل مجموعة كما موضحة أناه.

$$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\},$$

$$E(G)=\{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_3, v_2v_8, v_3v_5, v_4v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_1v_8\}.$$

كما أن

$\deg v_7 = 0$ ,

$\deg v_6 = 1$ ,

$\deg v_1 = \deg v_8 = 2$ ,

$\deg v_3 = \deg v_4 = \deg v_5 = 3$ ,

$\deg v_2 = 4.$

الرأس الذي يقع عليه لفة يحسب مرتين كما في الرأس $v_4$ ، وأن الرأس $v_7$ يكون رأسا منعزلا وذلك لعدم وقوع عليه أي حافة ، و أن ألرأس الذي يكون بدرجة واحد يسمى رأس **نهاية (end)**

مثل الرأس $v_6$ ، كما أن الرأس يكون زوجي أو فردي إذا كان درجة الرأس زوجي أو فردي على التوالي كما في الرأسين $v_1$ و $v_4$ على التوالي . وتعتبر الحافة بين الرأسين $v_2$ و $v_3$ حافة مضاعفة ، وأن رتبة البيان $G$ هي $8$ وحجمه هو $9$ .

بالنسبة لمجموع درجات رؤوس أي بيان، فأن لدينا المبرهنة الأساسية الأولى والتي تعود إلى اويلر والتي تسمى مأخوذة المصافحة (handshaking lemma) .

**مبرهنة 1 :** إذا كان $G = (V,E)$ بيانا عدد رؤوسه $p$ وعدد حافاته $q$، فأن مجموع درجات جميع رؤوسه يساوي $2q$، أي أن

$$\sum_{v\in V}\deg v = 2q .$$

**البرهان :** بما أن كل حافة تقع بالضبط على رأسين ( مختلفين أو متساويين ) ، فأن كل حافة تساهم بالضبط بـ $2$ في مجموع درجات جميع رؤوس البيان $G$ . وبذلك فأن مجموع درجات الرؤوس كلها يساوي ضعف عدد الحافات . **انتهى البرهان**

نلاحظ من المثال 2 أن

$$\sum_{v\in V(G)}\deg v = 18 \ \ , \ q = 9 \ .$$

**نتيجة 2 :** عدد الرؤوس الفردية الدرجة في أي بيان $G$ هو عدد زوجي .

**البرهان:** نفرض أن حجم البيان $G$ هو $q$ ، كما نفرض أن $W$ تمثل مجموعة الرؤوس الفردية الدرجة وأن $U$ يمثل مجموعة الرؤوس الزوجية الدرجة للبيان $G$. إذا من المبرهنة الأساسية الأولى يكون

$$2q = \sum_{v\in V(G)}\deg v = \sum_{v\in W}\deg v + \sum_{v\in U}\deg v .$$

من الواضح أن $\sum_{v\in U}\deg v$ يمثل عددا زوجيا ، إذا يكون $\sum_{v\in W}\deg v$ عددا زوجيا أيضا ، وهذا يؤدي إلى أن $|W|$ يكون عددا زوجيا . **انتهى البرهان**

**البيان التافه ( trivial graph ):** هو البيان الخالي من الحافات ، إذ يرمز للبيان التافه الذي برتبة p بالرمز $N_p$ .

**البيان المنتهي( finite graph ):** هو البيان الذي عدد حافاته E(G) منتهية ، كما يقال أنه **غير منتهي ( infinite )** إذا كانت E(G) مجموعة غير منتهية. من هذا التعريف نستنتج أنه يمكن أن يحتوي بيان منته على عدد غير منتهي من الرؤوس .

**البيان المنتظم (regular graph):** يقال للبيان G أنه بيان منتظم-r إذا كان درجة كل رأس في G بدرجة r .

**البيان−h** : يقال لبيان G أنه بيان−h إذا كان تكرار كل زوج غير مرتب من رأسين في E(G) لا يزيد على h ، عندما تكون قيمة h تساوي واحد فأن البيان−1 يكون بيانا بسيطا. فالبيان G في شكل 2−1 يكون بيان−3 بينما البيان G في الشكل 2−2 يكون بيان−2.

**البيان المضاعف (multigraph):** هو البيان الذي يحتوي على حافة مضاعفة.

**البيان البسيط (simple graph)** : هو البيان الذي لا يحتوي على حافات مضاعفة و لا على لفات .

**تمارين :**

**1.** ليكن G بيانا بسيطا برتبة p . أثبت أن عدد حافاته لا يزيد على $\frac{1}{2}p(p-1)$ .

**2.** ليكن $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$ مجموعة رؤوس بيان-1 ، فإذا علمت أن الرأسين $v_i$ و $v_j$ يكونان متجاورين إذا وفقط إذا $i \equiv j(\mathrm{mod}\,3)$ لكل $i, j=1,2, \dots ,8$ ، فجد حافات البيان G وارسمه، وهل أن البيان G بيان منتظم وبسيط .

**3.** إذا كان G بيانا بسيطا برتبة p، $p \geq 2$، فبرهن أن G يحتوي على رأسين بنفس الدرجة.

**4.** ارسم بيانا منتظما -3 عدد رؤوسه 10.

**5.** جد مجموع درجات البيان في الشكل 2-1 .