الفصل الرابع
الأخطاء والتقريب

4-1 مقدمة:

يتناول هذا الفصل عنوانين مترابطين يُعدان من المواضيع الأساسية في أية مسألة عملية. فيتم أولا تسليط الضوء على الأخطاء وماذا يعنيه هذا المصطلح من الناحية العلمية. كما يتم التطرق إلى مُسببات الأخطاء ووسائل معالجتها، ثم تُعرض بعض مقاييس الأخطاء. كما يتناول الفصل مفهوم التقريب وفوائده، إضافة إلى التقريب العددي وتقريب الدوال الرياضية مع بعض الأمثلة التوضيحية.

4-2 الأخطاء Errors:

هناك مصطلحان مترادفان هما "سهو **Mistake**" و "خطأ **Error**". أما السهو فهي قضية بشرية ناجمة عن النسيان أو التسرّع أو أي ظرف شخصي آخر، كأن تقول 2×3=5. وأما الخطأ فهو مصطلح علمي يُستخدم في العديد من المجالات العلمية. ففي علم الإحصاء Statistics والأمثلية Optimization، هناك مصطلحان وثيقا الصلة، هما "أخطاء **Errors**" و "بواقي **Residuals** ". إن هاذين المصطلحين يُستخدمان لقياس انحراف Deviation قيمة مُلاحظة واقعيا عن قيمتها النظرية. إنّ "الخطأ" في قيمة ما يمثل انحرافها عن قيمتها الحقيقية، في حين أن "الباقي" لقيمة ما يمثل الفرق بين تلك القيمة الملاحظة عن قيمتها في الدالة المُقدّرة. فالباقي هو عبارة عن الخطأ الملاحظ عند ملائمة نموذج رياضي لبيانات تجريبية. كما أن الباقي هو عبارة عن القيمة التقديرية للخطأ الإحصائي، الذي يطلق عليه

الخطأ العشوائي Random Error أو **الضوضاء Noise**، وهذا الخطأ الإحصائي لا يكون ملاحظاً عادة من الناحية النظرية.

في الرياضيات والحاسوب تحدث أخطاء عددية Numerical Errors، وهي عبارة عن تأثير مشترك لنوعين من أخطاء الحسابات: النوع الأول سببه الدقّة المحدودة للحسابات التي تَتضمّن **نقطة طليقة Floating-Point** أَو قِيَماً على شكل أعداد صحيحة. والنوع الثاني، والذي يسمى عادة **خطأ البتر Truncation Error**، والذي يمثل الفرق بين القيمة المضبوطة والقيمة التقديرية التي نحصل عليها نتيجة التقريب. إن خطأ البتر يَجيء عادة مِن الحقيقة أن التقريب المُستخدم يَتضمّن بتراً أو توسّعاً (نشراً) Expansion لسلسلة لانهائية من أجل جعل الحسابات ممكنة وعملية، أَو بسبب إهمال المراتب الأقل أهمية Least Significant Bits.

4-2-1 خطأ التدوير Round-off Error:

من المسائل الشائعة في الحسابات العددية ظهور ما يُعرف **بخطأ التدوير**، ويسمى أيضاً **الخطأ المُدَوّر**. إن الخطأ المدوّر يمثل الفرق بين القيمة الرياضية المضبوطة والقيمة التقريبية

المَحْسُوبة. فمثلا النسبة الثابتة تكون عادة على شكل كسر اعتيادي، π=22/7، وعند تمثيلها بكسر عشري مُقرّب إلى 15 مرتبة عشرية تكون 3.141592653589793. ولو قُرّبت إلى 5 مراتب عشرية تصبح ، 3.14159، ولو قُرّبت إلى مرتبتين عشريتين تصبح 3.14. إن الفرق بين القيمة الحقيقة للنسبة الثابتة والكسور العشرية المُقرّبة إليها يمثل خطأ التدوير. ومن خلال التحليل العددي يمكن أن يُقدّر هذا الخطأ. وتجدر الملاحظة إلى أنه عندما تُجرى سلسلة من الحسابات المتتالية والخاضعة للخطأ المُدَوّر، فإن هذا يؤدي إلى تراكم الأخطاء مما قد يؤدي في بَعْض الأحيان إلى نتائج **غير مستقرة عدديا Ill-Conditioned**، وهذا يَجْعل النتيجة بلا معنى.

إنّ الخطأ الناجم عن التمثيل العددي في الحاسوب يُدْعَى **خطأ التمثيل** Representation Error. والجدول (4–1) يوضح أمثلة على خطأ التمثيل.

الجدول(4–1): أمثلة على خطأ التمثيل.

المقدار	الوصف	القيمة العددية
	تمثيله	0.142 857 142 857...
1/7	تقريبه	0.142 857
	الخطأ	0.000 000 142 857...
	تمثيله	0.693 147 180 559 945 309 41...
ln 2	تقريبه	0.693 147
	الخطأ	0.000 000 180 559 945 309 41...
	تمثيله	1.414 213 562 373 095 048 80...
$\sqrt{2}$	تقريبه	1.41421
	الخطأ	0.000 003 562 373 095 048 80...
	تمثيله	1.259 921 049 894 873 164 76...
$\sqrt[3]{2}$	تقريبه	1.25992
	الخطأ	0.000 001 049 894 873 164 76...
	تمثيله	2.718 281 828 459 045 235 36...
e	تقريبه	2.718 281828 459 045
	الخطأ	0.000 000 000 000 000 235 36...
	تمثيله	3.141 592 653 589 793 238 46...
π	تقريبه	3.141 592 653 589793
	الخطأ	0.00000000000000023846...

إن زيادة عدد المراتب عند التمثيل يُخفّض مقدار الأخطاء المدورة المحتملة، إلا أن أيّ تمثيل محدد بعدد محدود من المراتب يمكن أن يسبب بَعْض أخطاء التدوير. إن هذا النوع مِن الخطأ من المستحيل تجنبه في التمثيلات التقليدية للأعداد، بل يُمْكِن أَن يُخفّض بزيادة عدد المراتب.

إن التدوير المضاعف يُمْكِن أَن يَزِيد خطأ التدوير. فعلى سبيل المثال، إذا دُوّر العدد 9.945309 إلى مرتبتين عشريتين (9.95) عند إدخال البيانات، ثم بعد ذلك دوّرَ ثانيةً إلى مرتبة عشرية واحدة (10.0) لأغراض عرض النتائج، فإن خطأ التدوير سوف يكون

0.054691. أما إذا دُوّر العدد الأصلي إلى مرتبة عشرية واحدة في خطوة واحدة (9.9)، فإن خطأ التدوير سوف يكون فقط 0.045309.

4-2-2 الطرائق القياسية للتَدوير:

هناك خمس طرائق قياسية لأداء التَدوير للحساب القياسي وضعته المؤسسة العالمية الأمريكية IEEE، وهي:

1- **البتر Truncation**: إذا قُطعت المراتب الباقية، ويسمى هذا التدوير أيضاً بالتَدوير إلى صفر. مثلا $0.142857 \approx 0.142$ (هنا أهملت جميع المراتب بعد المرتبة الثالثة).

2- **تدوير إلى الأقرب**: إذ تدوّر النتيجة إلى القيمة الأقرب. مثلا $0.142857 \approx 0.143$ (هنا قُربت المرتبة الرابعة لأن $5 \geq 8$)، وأن $0.142857 \approx 0.14$ (هنا قُربت المرتبة الثالثة لأن $5 > 2$).

4- **تدوير نحو** $-\infty$: إذ يُدوّر العدد دائماً إلى اليسار من خَطِّ العدد.

5- **تدوير نحو** $+\infty$: إذ يُدوّر العدد دائماً إلى اليمين من خَطِّ العدد.

ملاحظة:

يوجد في MATLAB عدد من الايعازات والدوال ذوات العلاقة بموضوع هذا المبحث:

1- إذا أريد زيادة عدد المراتب إلى 15 مرتبة يستعان format long.

2- يمكن الاستعانة بالدوال الحاسوبية الآتية لغرض التقريب:

أ- إذا أريد تقريب العدد إلى اقرب عدد صحيح باتجاه الصفر، فتُستخدم الدالة fix، مثلا fix(3.6)=3 و fix(-3.6)=-4.

ب- إذا أريد تقريب العدد إلى اقرب عدد صحيح باتجاه $-\infty$، فتُستخدم الدالة floor، مثلا floor(3.6)=3 و floor(-3.6)=-4 .

ت- إذا أريد تقريب العدد إلى اقرب عدد صحيح فتُستخدم الدالة round، مثلا round (3.6)=4 و round(-3.6)=-4 .

ث- إذا أريد تقريب العدد إلى اقرب عدد صحيح باتجاه $+\infty$ فتُستخدم الدالة ceil، مثلا ceil(3.6) = 4 و ceil(-3.6)=-3 .

4-2-3 مقاييس الأخطاء Measures of Errors:

لو فرضنا أن القيمة الحقيقية لمقدار معين هي θ، والقيمة التقريبية هي x، فإن القيمة المطلقة للفرق بينهما تعُرف **بالخطأ المطلق** Absolute Error، ويرمز له A.E.. أي إن:

$$A.E.(x) = |x - \theta|. \qquad \textbf{(1-3)}$$

ووحدة الخطأ المطلق هي وحدة كل من θ و x نفسها. أما **الخطأ النسبي Relative Error (R.E.)** للقيمة x، فيمثل نسبة الخطأ المطلق بالنسبة إلى القيمة الصحيحة θ. أي إن :

$$R.E.(x) = \frac{A.E.(x)}{\theta} = \frac{|x - \theta|}{\theta}. \qquad (2\text{-}3)$$

وكما هو واضح فإن الخطأ النسبي مجرد من الوحدات. إن النسبة المئوية للخطأ النسبي تُعرف **بالخطأ المئوي** Percentage Error (P.E.). أي إن :

$$P..E.(x) = R.E.(x) \times 100\%. \qquad (4\text{-}3)$$

المثال(4-1):

احسب الخطأ المطلق والنسبي والمئوي، مقرباً إلى 6 مراتب عشرية، عند تقريب النسبة الثابتة بـ n=1,2,3,4,5 مراتب عشرية.

الحل:

$\theta = 22/7$. أما الخطأ المطلق والنسبي والمئوي لكل قيمة فمبينة في الجدول الآتي.

n	X	$A.E(x)$	$R.E(x)$	**(%)** $P.E.(x)$
1	3.1	0.041593	0.013239	1.3239
2	3.14	0.001593	0.000507	0.0507
3	3.142	0.000407	0.000197	0.0197
4	3.1416	0.000007	0.000002	0.0002
5	3.14159	0.000003	0.000001	0.0001

وكما هو واضح فان كلاً من الخطأ المطلق والنسبي والمئوي يتناقص بزيادة عدد المراتب العشرية.

4-3 التقريب Approximation:

التقريب هو عبارة عن تمثيل غير دقيق لشيئ ما، بحيث يكون التقريب قريبا قربا كافيا من ذلك الشيئ. ويستخدم التقريب عادة في الرياضيات مع الأعداد وكذلك مع الدوال الرياضية. فمثلا تُقرب النسبة الثابتة π= 22/7=3.141592653589793 إلى 3.1416 في بعض الأحيان لغرض تيسير الحسابات. وهناك رمزان في الرياضيات يُستخدمان مع التقريب: الأول هو $\cong$ والذي يستخدم مع التقريب بصورة عامة، والثاني هو $\approx$ والذي يستخدم مع التقريب بالمحاذي Asymptotic.

يستخدم التقريب عادة لغرض التيسير، كما أن التقريبات قَدْ تُستَعمل لأن المعلومات قد تكون ناقصة مما يمنع من استعمال التمثيلات المضبوطة. وفي التطبيقات الواقعية، في الفيزياء مثلا، قد تتضمن المسائل مقادير معقّدة جداً مما يؤدي إلى صعوبة الحصول على الحل التحليلي، أَو قد يكون من المستحيل الحصول على الحل التحليلي لعدم توفر الشروط أو الأدوات اللازمة. لهذا، وحتى عند توافر التمثيل المضبوط، فإن التقريب قَد يُنتج حَلاًّ دقيقاً بما فيه الكفاية، وفي الوقت نفسه يؤدي إلى الإقلال من تعقيد المسألة بشكل ملحوظ.