المحاضرة الثانية

مبدأ الاستقراء الرياضي (The Principle of Mathematical Induction)

كما هو معلوم يتم مبدأ الاستقراء الرياضي وفق خطوات :

لنفرض ان : $p(n)$ عبارة ما حيث : $n \in Z^+$ ولنفرض ان q عدد صحيح موجب معطى لاثبات ان $p(n)$

عبارة صحيحة $\forall\, n \geq q$ يكفي ان نثبت ما يلي :

1) $p(n)$ عبارة صحيحة .

2) إذا كان: $m \geq q$ وكانت $p(m)$ صحيحة فان $p(m+1)$ عبارة صحيحة

مبرهنـة:

العبارات الاتية متكافئة :

أ) قاعدة الأستقراء الرياضي:إذا كانت B مجموعة جزئية من N^* وكان : $1 \in B$ و $(n \in B \Rightarrow n+1 \in B)$ فان : $B = N^*$.

ب) القاعدة العامة للاستقراء الرياضي :

اذا كانت : B مجموعة جزئية من N^* وكان : $1 \in B$ و $n \in B$ عندما : $n \in B$ لكل $m < n$ فان : $B = N^*$.

ج) لكل مجموعة جزئية غير خالية من N^* عنصر اول (اصغر) .

البرهان:

سنثبت أن (أ) $\Leftarrow$ (ب) $\Leftarrow$ (ج) $\Leftarrow$ (أ) :

أ) $\Leftarrow$ (ب) لتكن : $B \subseteq N$ بحيث أن $1 \in B$ و $n \in B$ عندما $m \in B$ لكل : $m < n$ ولنفرض أن

$E = \{ x \in N \mid y \in B\ \forall y \leq x \}$ إذن : $E \subseteq B$ وعليه يتم إثبات المطلوب وهو أن :
$E = N^*$

ولإثبات ذلك لاحظ أن : $1 \in E$ لأن : $1 \in B$ وإذا كان : $n \in E$ فإن: $y \in B$ لكل $y \leq n$
إذا: $(n + 1) \in B$
وعليه فإن : $y \in B$ لكل : $y \leq n + 1$ و هذا يعني أن : $n + 1 \in E$ اذاً $E = N^*$ حسب (أ)
(ب) ⇐ (ج) لتكن : B مجموعة جزئية من N^* و B لا تمتلك عنصر أول .اذاً :

$1 \notin B$ وعليه فإن : $1 \in N^* - B$ إذا كانت : $m \in N^* - B$ لكل $m < n$ فإن :

$n \in N^* - B$ لأنه إذا كان العكس فإن :n هي العنصر الأول للمجموعة B وهذا يناقض الفرض .

واذاً : $N^* - B = N^*$ حسب (ب) . ومنه ينتج أن : $B = \emptyset$
ج)⇐ (أ) لتكن Bمجموعة جزئية من N^*بحيث ان: $1 \in B$ و$(n \in B \Longrightarrow n + 1 \in B)$

ولتكن: $B` = N^* - B$

إذا كانت : $B` \neq \emptyset$ فإن : $B`$تمتلك عنصر أول وليكن : m, اذاً $m \neq 1$ لأن: $1 \in B$

وعليه فإن : $m > 1$ لكن: $m - 1 < m$ اذاً: $(m - 1) \notin B'$ وعليه فإن : $(m - 1) \in B$ وبالتالي

فإن : $m = (m - 1) + 1 \in B$ إذا: $m \notin B`$ وهذا تناقض .اذاً : $B` = \emptyset$ وعليه فان
$B = N^*$:

ملاحظة:

لإثبات صحة العبارة $P(n)$لجميع قيم : $n \in N^*$يكفي أن نبرهن على أن :$P(1)$ عبارة صحيحة ونثبت أن صحة العبارة $P(m)$ يؤدي الى صحة العبارة $P(m + 1)$ لأنه إذا كانت :

$$S = \{n \in N^* : p(n) \text{ صحيحةعبارة}\}$$

فإن :$1 \in S$ كما أنه إذا كانت :$m \in S$ فإن : $m + 1 \in S$ وعليه فإن : $S = N^*$

امثلـة: (أ)

أثبت أن:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

البرهان:

1)نفرض أن: $p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

إذن عندما $n = 1$: نجد أن الطرف الأيمن يساوي :

$\frac{(1)(2)(3)}{6} = 1$ والطرف الايسريساوي : $1^2 = 1$ أيضا وعليه فإن : $p(1)$ عبارة صحيحة .

2) $p(m)$ عبارة صحيحة . فنجد أن :

$$p(m) = \sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

3) ولإثبات صحة العبارة $p(m+1)$ نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)+6(m+1)^2}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} i^2 = \frac{(m+1)[m(2m+1)+6(m+1)]}{6}$$

$$= \frac{(m+1)[2m^2+m+6m+6]}{6} = \frac{(m+1)[2m^2+7m+6]}{6}$$

$$= \frac{(m+1)[(m+2)(2m+3)]}{6} = \frac{(m+1)[(m+1)+1][2(m+1)+1]}{6}$$

اذا كان $p(m+1)$ عبارة صادقة، وعليه فأن $p(n)$ عبارة صادقة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

(ب)

إذا كان a,b عددين حقيقين، $n \in N^*$، فأثبت أن

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{i=1}^{n} a^{n-i} b^{i-1}$$

البرهان:

نفـــرض أن $P(n): \frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{i=1}^{n} a^{n-i} b^{i-1}$. إذاً عنـــدما $n = 1$ نجـــد أن

$L.H.S. = 1$ ، $R.H.S. = \sum_{i=1}^{1} a^{1-i} b^{i-1} = 1$ ، وعليه فإن الطرفين متساويان ،

وبالتالي فإن $P(1)$ عبارة صادقة (صحيحة) .

والآن لنفرض أن $P(m)$ عبارة صـــادقة . إذاً $\frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a - b} = \sum_{i=1}^{m} a^{m-i} b^{i-1}$

ولإثبات صحة $P(m+1)$ ، لاحظ أن

$$\frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a - b} = \frac{a^{m+1} - ab^m + ab^m - b^{m+1}}{a - b} = a\left(\frac{a^m - b^m}{a - b}\right) + b^m$$

$$= a \cdot \sum_{i=1}^{m} a^{m-i} b^{i-1} + b^m = a\left(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}\right) + b^m$$

$$= a^m + a^{m-1}b + \cdots + ab^{m-1} + b^m = \sum_{i=1}^{m+1} a^{(m+1)-i} b^{i-1}$$

وعليه فإن $P(m+1)$ صادقة وبالتالي فإن $P(n)$ صادقة لكل $n \in N^*$.

(جـ)

إذا كان $ab = ba$ ، فإن $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ لكل $n \in N^*$ ، حيث

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. يسمى هذا القانون " مبرهنة ذي الحدين " والتي يجـــب

أن تنسب إلى أبي بكر الكرخي .

البرهان:

لتكن $P(n):(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$. إذاً إذا كانت $n=1$ ، فإن

$$R.H.S.=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{1-k}b^k=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b=a+b \text{ ، } L.H.S.=a+b$$

وعليه فإن $P(1)$ صحيحة . والآن لنفرض أن $P(m)$ ، إذاً

$(a+b)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k$ ، وعليه فإن

$$(a+b)^{m+1}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k(a+b)$$

$$=\left[\binom{m}{0}a^m+\binom{m}{1}a^{m-1}b+\binom{m}{2}a^{m-2}b^2+\cdots+\binom{m}{m}b^m\right](a+b)$$

$$=\binom{m}{0}a^{m+1}\left[\binom{m}{0}+\binom{m}{1}\right]a^mb+\cdots+\left[\binom{m}{i}+\binom{m}{i-1}\right]a^{m+1-i}b^i+\cdots+\binom{m}{m}b^{m+1}$$

لكن $\binom{m+1}{k}=\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}$ ، إذاً

$$(a+b)^{m+1}=\binom{m+1}{0}a^{m+1}+\cdots+\binom{m+1}{i}a^{m+1-i}b^i+\cdots+\binom{m+1}{m+1}b^{m+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}a^{(m+1)-k}b^k$$

إذاً $P(m+1)$ صحيحة . وعليه فإن $P(n)$ صحيحة لكل $n\in Z^*$.

(د) أثبت أن 6^n-1 يقبل القسمة على 5.

البرهان: نفرض أن

$P(n)=6^n-1$

يقبل القسمة على 5. عندما n=1، نحصل على

$$6^1 - 1 = 5$$

وهو يقبل القسمة على 5. أذاً P(1) يقبل القسمة على 5.

والان نفرض أن P(m) صحيحة، فنجد أن $P(m) = 6^m - 1$ يقبل القسمة على 5.

ولاثبات صحة العبارة $P(m+1) = 6^{m+1} - 1$ يقبل القسمة على 5، نجد أن

$$6^{m+1} - 1 = 6^{m+1} - 1 - 6 + 6$$

$$= 6(6^m - 1) + 5$$

نلاحظ ان المقدار $(6^m - 1)$ يقبل القسمة على 5. فان $6(6^m - 1)$ يقبل القسمة على 5، لهذا فان $P(m+1) = 6^{m+1} - 1$ يقبل القسمة على 5.

هـ) اثبت ان $2^n > n, \forall n = N^*$.

البرهان:

إذا كان $n = 1$ ، فإن $2^1 = 2 > 1$ وعليه فإن العبارة أعلاه صحيحة عندما $n = 1$. والآن لنفرض أن العبارة صحيحة عندما $n = m$. إذاً $2^m > m$ ، لكن $2^{m+1} > 2m$ ، $2m \geq m + 1$. إذاً $2^{m+1} > m + 1$ وعليه فإن العبارة أعلاه صحيحة عندما $n = m + 1$ ، وبالتالي فإن $2^n > n$ لكل $n = N^*$.

:H.W.

(ا) اذا كان $a_n = 2^{2n-1} + 3^{2n-1}$، فان $5 \setminus a_n$ لكل $n \in N^*$.

(ب) لكل $n \in N^*$، برهن ان $(5^n - 2^n)$ يقبل القسمة على 3 بدون باقي.

(ج) أثبت أن $2n^3 - 9n^2 + 13n + 25 > 0, \forall n \geq -1$.
