الفصل العاشر
نمذجة المحاكاة
Simulation Modeling

المحاكاة:

إن المقصود بالمحاكاة من الناحية اللغوية هو المُشابهة أو التقليد. أما من الناحية العلمية، فان المقصود بالمحاكاة "**بناء نموذج رياضي من اجل طريقة ما أو حالة معينة لغرض دراسة سماتها وميزاتها أو حل المسائل التي لها علاقة بها احتماليا بدلالة النموذج**".

إن نهج المحاكاة Simulation Technique هو تقليد للواقع يتعامل مع الحالات التي تعدّ فيها الخاصة العشوائية المفتاح لوصف نظام معين. إن نهج المحاكاة نهج حاسوبي مفيد وسلس وسهل التطبيق، يستخدم في تحليل المسائل المعقدة وتقليدها، وهو يسمح باختيار الأنظمة المتداولة وتقديرها دون الحاجة إلى إنجاز ذلك النظام وتنفيذه من الناحية الواقعية وكذلك عدم الحاجة لاختبار النظام الواقعي. وهو نهج علمي لحل المسائل المتعلقة بأنظمة واقعية، ويسمح بتجميع المعلومات ذات الصلة بسلوك النظام عبر تطوره مع الزمن، فضلاً عن أنه (أي نهج المحاكاة) يُستخدم لتقدير دقة النماذج الرياضية للمسائل الواقعية. إن نهج المحاكاة يعدّ الملاذ الأخير الذي يمكن استخدامه عند إخفاق الطرائق العددية التقليدية في إيجاد الحلول للمسائل المختلفة. وتشمل في الوقت الحاضر تطبيقات المحاكاة طيفا واسعا من التطبيقات العلمية والتقنية والطبية والهندسية والحياتية.

تتلخص عملية المحاكاة بمجموعة من الخطوات أهمها:

1- تعريف المسألة ومتغيراتها ثم بناء النموذج الرياضي لها.
2- تعيين العناصر المراد تفحصها ثم تسيير عملية المحاكاة.
3- تفحص النتائج واختيار الأفضل منها.

إن نماذج المحاكاة الحاسوبية تُستخدم على نطاق واسع لدراسة الأنظمة الكبيرة والمعقدة والباهظة التكاليف، مثل شبكات المواصلات والمفاعلات النووية والموانئ وسدود المياه والمنظومات الإدارية ومنظومات الدفاع الجوي. إذ يتم إجراء دراسات على الحاسوب يُحاكى به النظام الحقيقي لغرض معرفة تأثير افتراضات أو تطويرات أو معطيات معينة فيه، وذلك قبيل الشروع بتنفيذه. إن نموذج المحاكاة الحاسوبي هو عبارة عن تمثيل لمكونات النظام الثابتة والعلاقات التي تربط بعضها ببعض، فضلاً عن تمثيل منطقي لخصائص النظام الحركية وسلوكه في أثناء مدة زمنية محددة، وتحت فرضيات معينة بعمل النظام وسلوكه.

إن التجارب العشوائية التي تتطلب استخدام أعداد عشوائية (تُولّد عادة بالحاسوب) لها توزيع احتمالي معين يُطلق عليها المحاكاة التصادفية الحاسوبية، أو محاكاة المونت كارلو Mont Carlo Simulation. لقد أُستخدمت طريقة المونت كارلو في حدود العام 1930م من قبل الباحث الفيزيائي الإيطالي Enrico Fermi في دراسته لمسألة انتشار النيوترون، إذ استخدم طريقة

عشوائية بدائية لدراسة خواص النيوترون المكتشف حديثا آنذاك اعتمادا على الحاسبات الميكانيكية السائدة في ذلك الوقت. ومع ظهور أجهزة الحاسوب تمكن الباحثان الأمريكيان جون فون نيومان (1903–1957) John von Neumann وستانيسلو ولام Stanisław Marcin Ulam (1909 – 1984) من ربط الحاسوب بطريقة المونت كارلو، وعولجت مسائل في الفيزيائية النووية الحرارية. وبعد بناء أول حاسوب في العام 1945م بدأت طريقة المونت كارلو تُدرس بعمق وفعالية. ففي العام 1950 أُستخدمت طريقة المونت كارلو في جامعة Los Alamos في الأعمال المبكرة المتعلقة بصناعة القنابل الهيدروجينية. ومنذ ذلك الحين أصبحت طريقة المونت كارلو لها شعبية واسعة في المجالات التطبيقية المختلفة. ونشير إلى أن محاكاة المونت كارلو تعتمد أساسا على توليد أعداد عشوائية Random Numbers من توزيعات احتمالية مُحددة حسب طبيعة المسألة. وهناك تفاصيل كثيرة بهذا الصدد لا يتسع المجال إلى الدخول فيها، وسوف نعتمد أساسا على مولدات الأعداد العشوائية الجاهزة والموجودة في MATLAB والتي تتمتع بكفاءة كبيرة.

توليد الأعداد العشوائية

Generation of Random Numbers:

العدد العشوائي Random Number هو عدد يتولد بطريقة المصادفة وخارج سيطرتنا وبحيث لا يمكن التنبؤ بقيمته إذا ما أعطيت الأعداد السابقة له. وحسب معجم الرياضيات لمؤلفيه يوروفسكي وبوروفان للسنة 1995 فإن الأعداد العشوائية هي "**متتالية أعداد لها الخاصة العشوائية، إذ لا يمكن التنبؤ بأي عنصر انطلاقاً من العناصر التي تسبقه، وبوجه خاص لا يمكن لهذه الأعداد أن تكّون متوالية أو أن تتبع أي نمط منتظم أو متكرر**".

تعدّ مسألة توليد أعداد عشوائية من المسائل الجوهرية في المحاكاة. ومن الأعداد العشوائية التي لها أهمية خاصة في المحاكاة هي الأعداد التي تتبع التوزيع المنتظم، أو **الأعداد العشوائية المنتظمة Uniform Random Numbers**. والأعداد العشوائية المنتظمة هي عبارة عن أعداد عشوائية لها احتمالية ثابتة ومتساوية للحدوث في فترة معينة.

بعض طرائق توليد الأعداد العشوائية:

يمكن توليد الأعداد العشوائية بالعديد من الطرائق ومنها:

1- طريقة أوسط المربع The Mid-Square Method:

اقترح هذه الطريقة الباحث John von Neumann في السنة 1946. ولتوضيح هذه الطريقة نفرض أن لدينا العدد 8234 ونريد أن نُولّد منه أعداداً عشوائية صحيحة كلاً منها مؤلف من أربع مراتب عشرية. إن العدد الابتدائي الذي نبدأ التوليد منه يُطلق عليه عادة اسم العدد البذرة Seed Number ويرمز له Xo ، في مثالنا هذا Xo=8234. إن خوارزمية طريقة أوسط المربع تكون كما هي مبينة في أدناه:

الخوارزمية (1): توليد عدد عشوائي مؤلف من d من الرتب بطريقة أوسط المربع .

الخطوة (1): اختر العدد البذرة Xo ذا d من المراتب العشرية.

الخطوة (2): ربّع X_{i-1} كي تحصل على X_{i-1}^2 ذي 2d من المراتب.

الخطوة (3): خُذ المراتب d الواقعة في منتصف العدد المولّد في الخطوة (2) وذلك بقطع 25% من طرفي المراتب كي ينتجَ العدد الجديد ذا المراتب d .

وبتطبيق الخوارزمية السابقة على المثال المذكور آنفا نجد أن Xo=8234 وان $X_o^2 = 67798756$. وطالما أن عدد مراتب العدد العشوائي المطلوب هو d = 4، لذا فإننا نختار $X_1 = 7987$.

وبتكرار هذه العملية نحصل على المتتالية الآتية من الأعداد العشوائية ذوات المراتب العشرية الأربع {7987, 7921, 7422, 0860,...} . إن الميزة الايجابية لهذه الطريقة أنها سريعة وسهلة الاستخدام. أما سلبياتها فهي:

أ- أن الأعداد المولّدة بهذه الطريقة لا تنجح عادة في اختبار عشوائية الأعداد Test of Randomness.

ب- أن طول الدورة يعتمد على قيمة العدد البذرة Xo.

تتميز هذه الطريقة بالتحيز، إذ تقترب الأعداد المولّدة من الصفر نتيجة التربيع. مثلا لو كانت d=2 و Xo=03 لذا فإن $X_0^2 = 0009$ مما يؤدي إلى اختيار X1=00، وبالنتيجة سوف تكون جميع الأعداد التالية بالتوليد أصفاراً.

2- طريقة أوسط الضرب The Mid-Product Method:

هذه الطريقة مشابهة لطريقة أوسط المربع ونوجزها بالخوارزمية الآتية:

الخوارزمية (2): توليد عدد عشوائي مؤلف من d من المراتب بطريقة أوسط الضرب.

الخطوة (1): اختر العددين البذرة Xo و X_1 بحيث يكون كل منهما مؤلفاً من d من المراتب العشرية.

الخطوة (2): اضرب Xo و X_1 لتحصل على العدد المؤلف من 2d من المراتب.

الخطوة (3): خُذ المراتب d الواقعة في منتصف العدد المولّد في الخطوة (2) وذلك بقطع 25% من طرفي المراتب كي ينتجَ العدد المولّد 1 ذا المراتب d .

إن هذه الطريقة تعطي أعداداً ذوات طول دورة أكبر من طريقة أوسط المربع وأقل تحيزاً، إلا أن سلبيات طريقة أوسط التربيع لا تزال موجودة في هذه الطريقة.

المثال (1):

استخدم طريقة أوسط الضرب لتوليد عشرة أعداد عشوائية ذوات مرتبتين عشريتين مستخدما العددين البذرة X0=12 و X1=53.

الحل:

$X_0X_1=12\times53$

$=0636$, $\therefore X_2=63$

$X_1X_2=3339$, $\therefore X_3=33$

$X_2X_3=2079$, $\therefore X_4=07$

$X_3X_4=0231$, $\therefore X_5=23$

$X_4X_5=0161$, $\therefore X_6=16$

$X_5X_6=0368$, $\therefore X_7=36$

$X_6X_7=0576$, $\therefore X_8=57$

$X_7X_8=2052$, $\therefore X_9=05$

$X_8X_9=0285$, $\therefore X_{10}=28$

$X_9X_{10}=0140$, $\therefore X_{11}=14$

وبذلك تكون الأعداد العشوائية المولّدة على النحو الآتي:

{63, 33, 7, 23, 16, 36, 57, 5, 28, 14}.

تكامل المونت كارلو

Monte Carlo Integration:

يعدّ التكامل من الأدوات الرياضية البالغة الأهمية في مجالات شتى. ويوافق في العديد من الأحيان عدم إمكانية، أو صعوبة، إيجاد التكامل بالطرائق الرياضية التحليلية، فتظهر الحاجة الملحة لحسابه عدديا، وهذا ما يعرف بالتكامل العددي Numerical Integration. وهناك العديد من الطرائق التي تستخدم في التكامل العددي، مثل قاعدة منتصف المسافة Midpoint Rule وقاعدة شبه المنحرف Trapezoidal Rule وقاعدة سمبسون Simpson's Rule. إن جميع هذه الطرائق تتعامل مع متغيرات حتمية (غير عشوائية)، كما أنها تكون كفوءة في الأبعاد(*) القليلة فقط، لا تتجاوز البُعد الثالث.

إن طريقة تكامل المونت كارلو من طرائق المحاكاة العددية التي تُستخدم وبنجاح تام لإيجاد التكاملات العددية ولأي عدد من الأبعاد. وهي طريقة الملاذ الأخير، فإذا أخفقت كل الطرائق في إيجاد تكامل عددي، وبأي عدد من الأبعاد كان، فإن طريقة تكامل المونت كارلو تستطيع أن

(*) **يقصد بأبعاد التكامل عدد التكاملات: فالتكامل** $\int g(x)dx$ **أحادي البُعد، والتكامل** $\int\int g(x,y)dxdy$ **ثنائي البُعد، والتكامل** $\int\int\int g(x,y,z)dxdydz$ **ثلاثي البُعد.. الخ.**