البيانات الجزئية :

البيان الجزئي (subgraph): يقال للبيان H أنه بيان جزئي من البيان $G=(V,E)$ (يكتب$G\subset H$) إذا كانت مجموعة رؤوس H هي مجموعة جزئية من مجموعة رؤوس G $(V(G)\subseteq(V(H))$، وكانت كل حافة في H هي حافة في G $E(G)\subseteq(E(H))$. من الواضح أن كل بيان G هو بيان جزئي من نفسه.

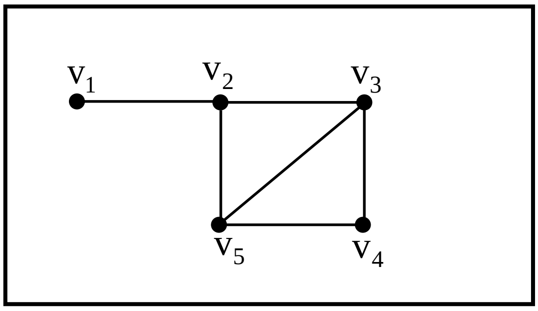
البيان الجزئي المولد (span subgraph): يقال للبيان الجزئي H من البيان $G=(V,E)$ أنه بيان مولد، إذا كانت مجموعة رؤوس H هي نفس مجموعة رؤوس G $(V(H)=V(G))$.

البيان المستحث بالنسبة للرؤوس : هو بيان جزئي مجموعة رؤوسه R مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة رؤوس البيان G ، أي أن $\phi\neq R\subseteq V(G)$ ، ومجموعة حافة هي كل الحافات في البيان G التي تصل بين أي رأسين في R ، ويرمز للبيان المستحث بالنسبة لمجموعة الرؤوس R بـ $\langle R\rangle$، ويسمى أحيانا بالبيان المقطعي.

البيان المستحث بالنسبة للحافات : هو بيان جزئي مجموعة حافاته F مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة حافات البيان G ، أي أن $\phi\neq F\subseteq E(G)$ ، ومجموعة رؤوسه هي كل الرؤوس في البيان G التي تقع على أي حافة من حافات F ، ويرمز للبيان المستحث بالنسبة لمجموعة الحافات F بـ $\langle F\rangle$.

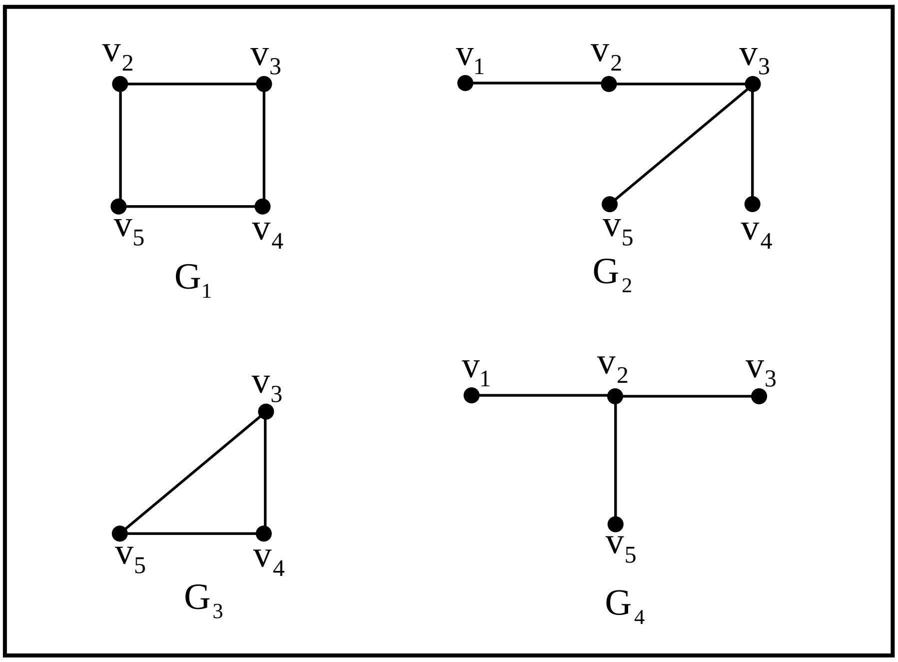
لتوضيح المفاهيم السابقة نأخذ المثال التالي:

مثال 1: ليكن G بيانا موضحا بالشكل 3−1 .



الشكل 3−1 البيان G

من الواضح أن البيان G بيان بسيط ومنتهي وغير منتظم. أما في شكل 3−2، فأن



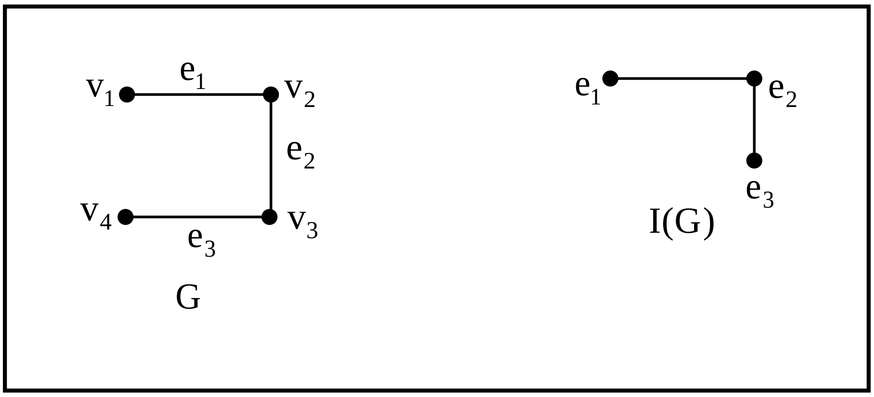
الشكل 3−2

البيان G_1 هو بيان جزئي من البيان G، وذلك لأن $V(G_1) \subseteq V(G)$ و $E(G_1) \subseteq E(G)$.

البيان G_2 هو بيان جزئي مولد من البيان G، وذلك لأن $V(G_2) = V(G)$ و $E(G_2) \subseteq E(G)$.

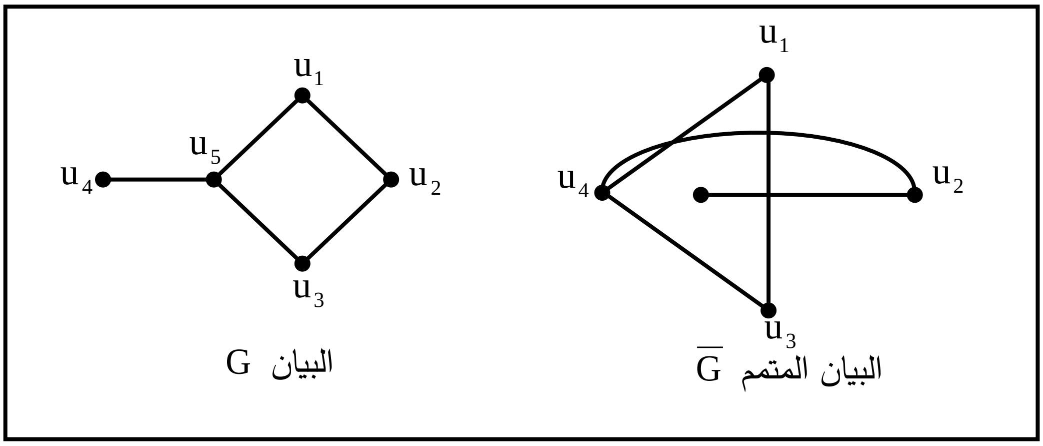
لتكن $R=\{v_3,v_4,v_5\}$ مجموعة جزئية من مجموعة رؤوس البيان G ، فأن البيان المستحث بالنسبة للمجموعة R هو البيان G_3 ، أما إذا كانت $F=\{v_1v_2,v_2v_3,v_2v_5\}$ مجموعة جزئية من مجموعة حافات البيان G ، فأن البيان المستحث بالنسبة للمجموعة F هو البيان G_4 . (انظر إلى الشكل3−2) .

بيان المناقلة (interchange): ليكن G بيانا، فيعرف بيان المناقلة للبيان G، والذي يرمز له بالرمز $I(G)$، بأنه البيان الذي كل حافة في البيان G تمثل رأس في بيان المناقلة ، أي أن عدد عناصر مجموعة رؤوس بيان المناقلة يساوي عدد عناصر $E(G)$، وعندما يرمز لرؤوس بيان المناقلة بالرموز التي تمثل حافات G، فأن الرأسين e و e' في بيان المناقلة يكونان متجاورين إذا وفقط إذا كانتا الحافتان في G متجاورتان(لاحظ الشكل 3−3) .



الشكل 3−3

ليكن G بيانا, فإن **متمم** (complementary) البيان G هو بيان نرمز له $\overline{G}$ وفيه $V(\overline{G})=V(G)$ ويكون الرأسين u و v متجاورين في $\overline{G}$ إذا لم يكونا متجاورين في G وبالعكس.(لاحظ الشكل (3−4)).



الشكل (4.3)

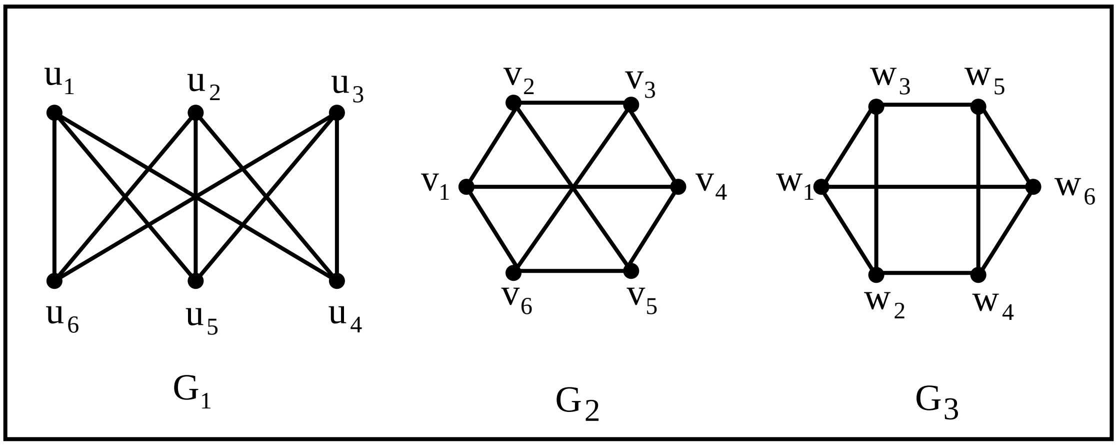
التشاكل والتطابق في نظرية البيان :

التشاكل (isomorphic): يقال للبيانين $G_1 = (V_1 , E_1)$ و $G_2 = (V_2 , E_2)$ أنهما متشكلان إذا وجد تقابل متباين ϕ بين V_1 و V_2 ، بحيث أن لكل رأسين u و v في G_1 يكون $u\, v \in E_1 \Leftrightarrow \phi u\, \phi v \in E_2$، سوف نرمز للتشاكل بين البيانين G_1 و G_2 بـ $G_1 \cong G_2$.

من الواضح أن التشاكل علاقة تكافئية على البيانات. من تعريف التشاكل يمكن أن نستنتج أن : $p(G_1) = p(G_2)$ ، $q(G_1) = q(G_2)$ ، $\deg_{G_1} u = \deg_{G_2} \phi u$ ، لكل رأس u في G_1.

هذه الشروط أعلاه التي تم استنتاجها من التعريف هي شروط ضرورية ولكن ليست شروط كافية ليكونا البيانين G_1 و G_2 متشاكلين ، لتوضيح ذلك نأخذ المثال الأتي :

المثال 2: ليكن كلا من G_1 و G_2 و G_3 بيانا من الرتبة 6 وبحجم 9 ، موضحة بالشكل $(5-3)$.



الشكل (3−5)

نلاحظ أنه من الممكن إيجاد تقابل ϕ بين $V(G_1)$ و$V(G_2)$ ، بحيث أن

$$\phi(u_1)=v_1,\ \phi(u_2)=v_3\ ,\ \phi(u_3)=v_5\ ,\ \phi(u_4)=v_2\ ,\ \phi(u_5)=v_4,\ \phi(u_6)=v_6\ .$$

هذا التقابل يحافظ على التجاور ، أي أن

$$u_i\,u_j \in E(G_1) \Leftrightarrow \phi u_i\,\phi u_j \in E(G_2)\ ,\ i\neq j\ , i,j=1,2,3,4,5,6\,.$$

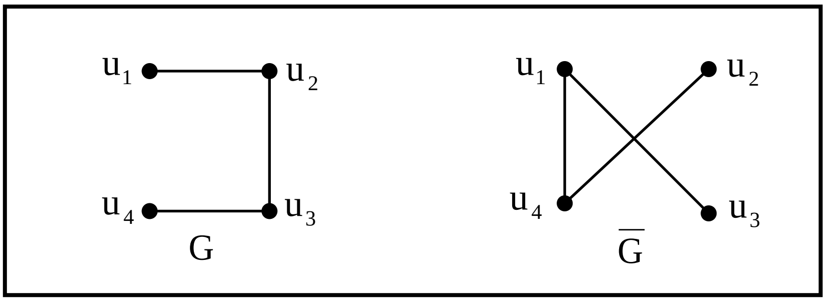
إذا ، البيانان G_1 و G_2 يكونان متشاكلان .

أما بالنسبة للبيان G_3 و G_1 (أو G_3 و G_2)، فأنه لا يوجد تقابل ϕ بين $V(G_3)$ و $V(G_1)$ ، يحقق شرط التجاور ، أي أن

$$u_iu_j \in E(G_1) \not\Leftrightarrow \phi u_i\phi u_j \in E(G_3)\,,\ i\neq j\ , i,j=1,2,3,4,5,6\,.$$

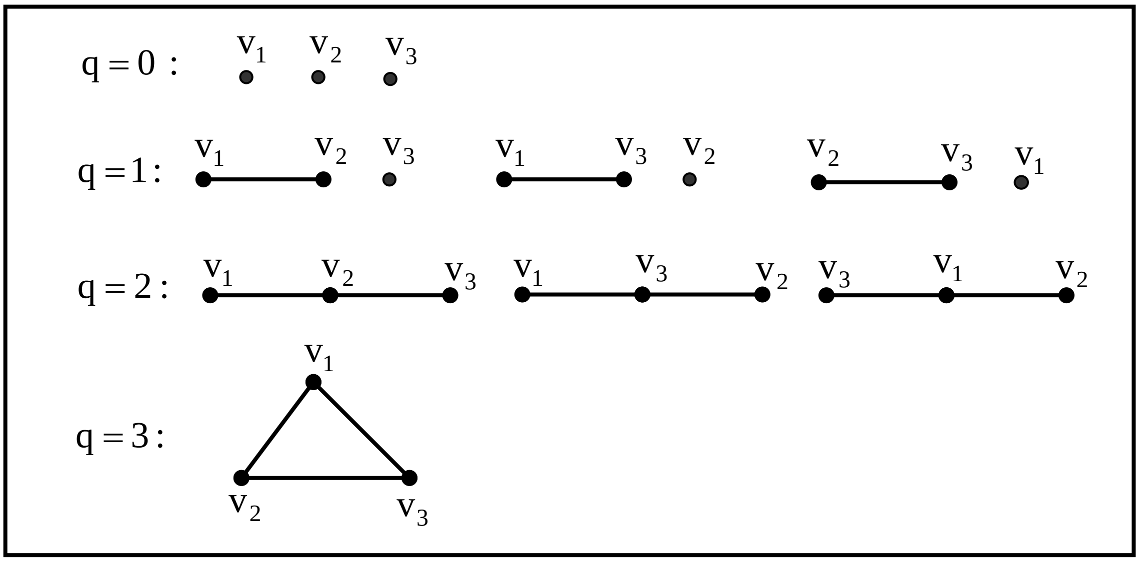
فمثلا إذا أخذنا $\phi(u_1)=w_1$ و $\phi(u_2)=w_5$ ، فأنه لا يوجد أي رأس من البيان G_3 يقابل الرأس u_3 في G_1 بحيث يحافظ على شرط التجاور.

إذا كان $G \cong \overline{G}$ فيقال إن للبيان G انه **متمم − ذاتي** (self−complementary). (لاحظ الشكل (3−6)).



الشكل (3−6)

التطابق (Identical): يقال للبيانين $G_1=(V_1\ ,\ E_1)$ و $G_2=(V_2\ ,\ E_2)$ أنهما متطابقان إذا كان $V_1=V_2$ و $E_1=E_2$ ، والذي سوف نرمز له $G_1=G_2$. من الواضح أن كل بيانين متشاكلين ليس من الضروري أن يكونان متطابقين ولكن العكس صحيح . إن العدد الكلي للبيانات الغير متطابقة من الرتبة p بنفس مجموعة الرؤوس V هي $2^{p(p-1)/2}$ ، لتوضيح ذالك نأخذ $p=3$ ، نلاحظ أن هناك ثمان بيانات غير متطابقة كما موضحة بالشكل (3−7) .



الشكل (3−7)

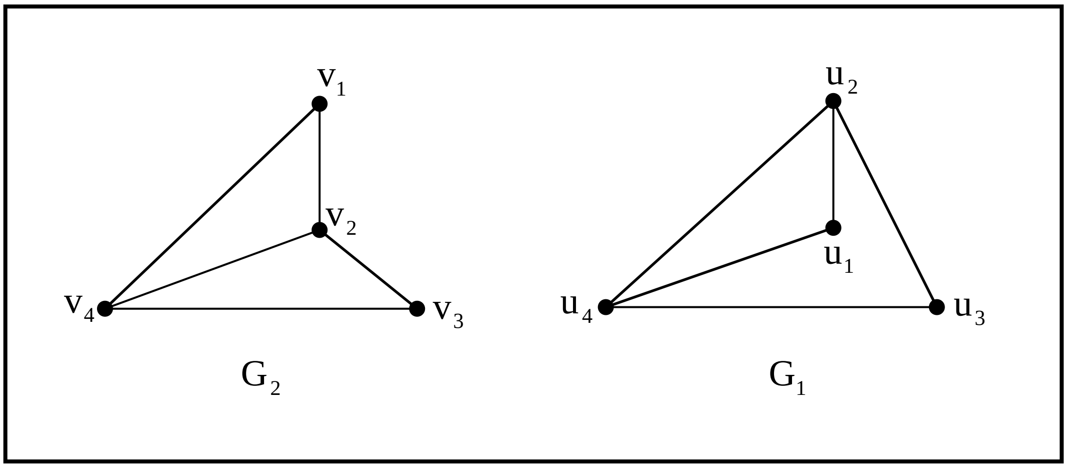
بالنسبة إلى هذا المثال، نلاحظ أن البيانات الثلاثة المقابلة $q=1$ متشاكلة وكذلك الحال عندما $q=2$ ، لكنهم غير متطابقين .

تمارين :

1. أثبت أن هنالك أربعة بيانات بسيطة ، غير متشاكلة مثنى مثنى ، بثلاثة رؤوس.

2. أثبت أن هنالك أحد عشر بيانا بسيطا غير متشاكلة مثنى مثنى، بأربعة رؤوس.

3. هل أن البيانين G_1 و G_2 المعطيان في شكل $(3-8)$ متشاكلين أم لا ؟ بين ذلك.



الشكل $(3-8)$

4. ما الفرق بين التشاكل والتطابق، وأيهما يؤدي إلى الآخر.

5. جد بيان المناقلة للبيان G_3 الموضح في شكل3−5.