هناك نظرية في الرياضيات متخصصة بالتقريب تُعرف بنظرية التقريب Approximation Theory. إن نظرية التقريب تهتم بكيفية الحصول على أفضل تقريبات للدوال الرياضية بالاستعانة بدوال رياضية أسهل، وبحيث تعطي هذه التقريبات أقل الأخطاء. وتجدر الملاحظة بأن المقصود بكلمتي "أفضل" و "أسهل" تعتمد على معايير علمية معينة وكذلك على طبيعة التطبيق. وندرج في السطور القادمة أداتين رياضيتين شائعتين تُستخدمان لغرض التقريب.

4-3-1 سلسلة تايلور Taylor Series:

تعد سلسلة تايلور من الأدوات الرياضية الشائعة جدا والتي تستخدم في العديد من المواضيع الرياضية، ويعود اكتشاف هذه السلسلة إلى الرياضي الانكليزي بروك تايلور Brook Taylor (1685-1731) وذلك في العام 1715 . إن سلسلة تايلور عبارة عن تمثيل للدالة بوصفها مجموعاً لعدد لانهائي مِن الحدود، إذ إن كل حد من هذه الحدود يُحسب من قيم مشتقاته عند نقطة وحيدة. وعندما تكون سلسلة تايلور متمركزة حول الصفر، فإنها تدعى عندئذ سلسلة ماكلورين، نسبة إلى الرياضي الاسكتلندي كولن ماكلورين Colin Maclaurin الذي استخدم هذه الحال الخاصّة لسلسلة تايلور على نطاق واسع في القرن الثامن عشر.

الشكل (4-1): بروك تايلور و كولن ماكلورين.

إذا كانت f(x) دالة قابلة للاشتقاق (حقيقية Real أو مركبة Complex) بجوار النقطة a، فإن سلسلة تايلور لهذه الدالة تكون على النحو الآتي:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f^{(3)}(a) + \ldots \qquad (4a\text{-}3)$$

أو

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\ \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a);\ f^{(n)}(a)=\left.\frac{df^n(x)}{dx^n}\right|_{x=a},\qquad \text{(4b-3)}$$

إذ إن !n ترمز إلى مضروب n، $n!=1\times2\times3\times...\times n$، وإن 1=!1=!0. وعندما تكون a=0، فعندئذ يُطلق على السلسلة سلسلة ماكلورين.

المثال (4–2):

جد سلسلة ماكلورين لكل من الدوال الآتية:

i- $(1-x)^{-1}$.

ii- $(1-x)^{-2}$.

iii- e^x.

iv- ln(1-x).

v- ln(1+x).

vi- $\sqrt{1+x}$.

vii- sin(x).

viii- cos(x).

ix- tan(x).

الحل:

i- $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+..\ ;|.x|<1.$

ii- $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+..;\ |x|<1.$

iii- $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+...;\ \forall x.$

iv- $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};\ |x|<1.$

v- $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n};\ |x|<1.$

vi- $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{125}x^4+...;\ |x|<1.$

vii- $\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...;\ \forall x.$

viii- $\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...;\ \forall x.$

ix- $\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+...;\ |x|<\frac{\pi}{2}.$

ملاحظة:

من التطبيقات المهمة لسلسلتي تايلور وماكلورين استخدامهما في تقريب الدوال، وذلك بأخذ الحدود الأولى منها، والتي تمثل حدودية Polynomial من درجة معينة، وكما موضح في المثال الآتي.

4-3-2 التوسّع ذو الحدين Binomial Expansion:

كما هو معروف فإن التوسّع ذا الحدين هو:

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots \qquad (5\text{-}3)$$

وإن شرط تقارب هذه السلسلة هو أن تكون $x^2 < a^2$. إذ إن n هي أي عدد، موجب أو سالب. وإذا كان n عدداً موجباً، فان عدد حدود السلسلة سوف يكون محدودا. ويمكن الاستفادة من التوسّع ذي الحدين للحصول على تقريبات مفيدة، وكما سوف نبين في المثال اللاحق.

ملاحظة: (إيجاد القوى والجذور)

طالما أن شرط تقارب التوسّع ذي الحدين هو أن تكون $x^2 < a^2$، لذا لو كانت $|nx| < 1$ وكان $|x| < 1$، فمن العلاقة الأخيرة نستنتج التقريب الآتي والذي يمكن الاستفادة منه لإيجاد القوى والجذور يدويا:

$$(1+x)^n \cong 1 + nx. \qquad (6\text{-}3)$$

المثال (4-4) :

جد القيمة التقريبية لكل من المقادير الآتية ثم احسب الخطأ المطلق والنسبي والمئوي لكل منها.

i- $(1.0075)^{20}$.

ii- $\sqrt{0.86}$.

iii- $\sqrt[5]{1.03}$.

الحل:

i- $(1.0075)^{20} = (1+0.0075)^n \cong 1 + 20(0.0075) = 1.15.$

أما القيمة المضبوطة للمقدار $(1.0075)^{20}$، مقرّبة إلى أربع مراتب عشرية، فهي 1.1612. وبذلك يكون الخطأ المطلق للتقريب هو $A.E.(1.15) = |1.1612 - 1.15| = 0.0112$، والخطأ النسبي هو $R.E.(1.15) = A.E.(1.15)/1.1612 = 0.0097$، والخطأ المئوي $P.E.(1.15) = 100 \times R.E.(1.15)/1.1612 = 0.97\%$.

ii- $\sqrt{0.86} = (1-0.14)^{1/2} \cong 1 - \frac{1}{2}(0.14) = 0.965..$

أما القيمة المضبوطة للمقدار $\sqrt{0.86}$، مقرّبة إلى أربع مراتب عشرية، فهي 0.9274. وبذلك يكون الخطأ المطلق للتقريب هو $A.E.(0.965) = |0.9274 - 0.965| = 0.0376$، والخطأ النسبي

هـــــــو $0.0405 = 0.9274/0.965) = A.E.(0.965)$ ، والخطـــــــأ المئـــــــوي

$P.E.(0.965) = 100 \times R.E.(0.965)/0.9274 = 4.36\%$.

iii- $\sqrt[5]{1.03} = (1+0.03)^{1/5} \cong 1 + \frac{1}{5}(0.03) = 1.006.$

أمـــا القيمـــة المضـــبوطة للمقـــدار $\sqrt[5]{1.03}$ فهـــي 1.0059. وبالطريقـــة نفســـها نجـــد أن

$A.E.(1.006) = 0.0001$ و $R.E.(1.006) = 0.0001$ و $P.E.(1.006) = 0.01\%$.

المثال (4–5) :

استخدم التوسّع ذا الحدين لإيجاد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt{a^2 + x^2}$ ، إذ إن $a < x$.

الحل:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = x(1 + \frac{a^2}{x^2})^{1/2}$$
$$\cong x(1 + \frac{a^2}{2x^2}).$$

لأنه طالما أن $a < x$ ، فمن المؤكد أن $a^2 << x^2$.

تمارين

4–1 احسب الخطأ المطلق والنسبي والمئوي، مقرباً إلى 4 مراتب عشرية، عند تقريب كل من المقادير الآتية بـ n=1,2,3,4 مراتب عشرية.

i- 3/11.

ii- $(3/11)^2$.

iii- $\sqrt{7}$.

iv- $\sqrt[3]{7}$

4–2 اكتب برنامجا يقوم بإيجاد القيمة التقريبية لكل من المقادير الآتية:

i- ln(x).

ii- $\sqrt{x}$.

iii- sin(x).

iv- cos(x).

v- tan(x).

عند قيم محدودة من x وذلك بأخذ أول n=2,4,6,…,20 من الحدود من سلسلة ماكلورين، ثم حساب الخطأ المطلق والنسبي والمئوي لكل منها.

3-4 جد سلسلة ماكلورين لكل من الدوال الآتية:

i- $(1+\mathrm{x})^{-1}$.

ii- $(1+x)^{-2}$.

iii- $\sqrt[3]{1+x}$.

iv- sec(x).

4-4 جد القيمة التقريبية للمقدار ln(2) وذلك بأخذ أول n=2,4,6,…,20 من الحدود من سلسلة ماكلورين، ثم احسب الخطأ المطلق والنسبي والمئوي لكل منها.

5-4 أكتب برنامجا يقوم بإيجاد كل مما يأتي:

أ- سلسلة ماكلورين من الدرجة الخامسة للدالة الرياضية $f(x)=\ln(x)$.

ب- سلسلة ماكلورين من الدرجة الخامسة للدالة الرياضية $f(x)=x\ln(x)$.

ت- سلسلة تايلور التقريبية حول النقطة a للدالة $f(x)=\sec(x)$.

6-4 جد القيمة التقريبية لكل من المقادير الآتية ثم احسب الخطأ المطلق والنسبي والمئوي لكل منها.

i- $(1.005)^{10}$.

ii- $\sqrt{0.96}$.

iii- $\sqrt[3]{1.05}$.

iv- $(\pi/3)^5$.