قابليـة القسمة Divisibility

القسمة: هي ايجاد عدد نسبته الى الواحد كنسبة المقسوم الى المقسوم عليهِ.

إذا كان $a, b \in Z$ ، $b \neq 0$ ، فيقال عن a أنه يقبـــل القـــسمة (divisible) على b أو أن b تقسم (divides) a إذا وجــد $m \in Z$ بحيـــث أن $a = bm$.

إذا كان a يقبل القسمة علـــى b فيعبـــر عـــن ذلـــك بالـــشكل b\a أو $\frac{a}{b}$ ،

أما إذا كـــان a يقبـــل القـــسمة علـــى b فيعبـــر عـــن ذلـــك بالـــشكل $b \nmid a$.

يكون العدد الصحيح a حيث $a \neq 0$ قاسمًا للعدد الصحيح b ونكتب $a \mid b$ إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح c يحقق المساواة $b = c\,a$ كما نقول أن : a عامل من عوامل b أو b قابل للقسمة على a أو أن b من مضاعفات a واذا كان : a لايقسم b نكتب: $a \nmid b$. وعلى سبيل المثال :

$7 \mid 28 \qquad 4 \nmid 10 \qquad 3 \mid 15$

$3 \mid 15$ لان : $15 = 5 \times 3$ و $7 \mid 28$ لان : $28 = 4 \times 7$

اي ان : $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} = \frac{\text{مقسوم}}{\text{مقسوم عليه}}$،

$a \div b = c \,, or\ c = \frac{a}{b}, where\ b \neq 0.$

حيث ان c هو العدد (ناتج القسمة).

مثال: (ا) $\frac{6}{3} = 2$

العدد 2 نسبته الى الواحد اي $\frac{2}{1}$ كنسبة المقسوم الى المقسوم عليه، اي ان $\frac{6}{3}$.

(ب) $-4 = -5 \setminus 20$

العدد (-4) نسبته الى الواحد اي $\frac{-4}{1}$ كنسبة المقسوم الى المقسوم عليه، اي ان $\frac{20}{-5}$.

مثال: اذا كان $a_n = 2^{2n-1} + 3^{2n-1}$، فاثبت ان $5 \setminus a_n$.

البرهان:

إذا كان $a_n = 2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ ، فإن $5 \setminus a_n$ لكل $n \in N^*$ ويمكن أثبات ذلك بالاستقراء (الاستنتاج) الرياضي ، لأنه إذا كان $n = 1$، فإن $a_1 = 5$ يقبل القسمة على 5 . إذا فرضنا أن $5 \setminus a_m$ فإن $\frac{a_m}{5} = \frac{2^{2m-1} + 3^{2m-1}}{5} = k$ ، وعليه فإن $2^{2m} = 10k - 2 \times 3^{2m-1}$

ولكي نثبت أن $5 \setminus a_{m+1}$ ، لاحظ أن

$$\frac{a_{m+1}}{5} = \frac{2^{2m+1} + 3^{2m+1}}{5} = \frac{2(10k - 2 \times 3^{2m-1}) + 3^{2m+1}}{5} = 4k + 3^{2m-1}$$

وعليه فإن $5 \setminus a_{m+1}$. إذاً $5 \setminus a_n$ لكل $m \in N^*$.

تعريف: اذا كان $a, b \in Z, b \neq 0$، فيقال عن a انه يقبل القسمة (divisible) على b، او ان b تقسم (divides) a، اذا وجد عدد $m \in Z$ بحيث ان **a=b.m**.

ملاحظة:

- اذا كان a يقبل القسمة على b فيعبر عن ذلك بالشكل $b \setminus a$ او $\frac{a}{b}$.
- اما اذا كان a لا يقبل القسمة على b فيعبر عن ذلك بالشكل $b \nmid a$.

مثال : (ا) $4 \setminus 8$، لان $8 = 2 \times 4$.

(ب) $b \setminus 0$، $\exists m = 0; m \in Z, b \neq 0$.

(ج) $\mp a \setminus a$، $\exists m = \mp 1; m \in Z, a \neq 0$.

(د) $\mp 1 \setminus a$، $\exists m = \mp a; m \in Z, \forall a \in Z$.

الخواص الاساسية لقابلية القسمة:

مبرهنة (5):

أذا كان $a, b, c \in Z$، فان

(أ) $a \setminus \mp 1 \Leftrightarrow a = \mp 1$ (ب) $(b \setminus a \wedge c \setminus b) \Rightarrow c \setminus a$

(ج) $(b \setminus a) \wedge (a \setminus b) \Leftrightarrow a = \mp b$ (د) $(b \setminus a) \wedge c \neq 0 \Rightarrow bc \setminus ac$

(هـ) $c \setminus a \wedge c \setminus b \Rightarrow c \setminus ax + by \quad \forall x, y \in Z$

البرهان:

(أ) نفرض أن $a \setminus \mp 1$. إذاً يوجد $b \in Z$ بحيث أن $ab = \mp 1$ ، وعليه فإن $|ab| = |a|\,|b| = 1$. لكن كلاً من a ، b لا يساوي صفراً . إذاً $|a| \geq 1$ و $|b| \geq 1$ فإذا كانت $|a| > 1$ أو $|b| > 1$، فإن $|ab| > 1$. إذاً $|a| = |b| = 1$ ومنه ينتج أن $a = \mp 1$ ، $b = \mp 1$.

وإذا كان $a = \mp 1$ فمن الواضح أن $a \setminus \mp 1$.

(ج) إذا كان $a = \mp b$ فمن الواضح أن $b \setminus a$ و $a \setminus b$. ولإثبات العكس نفرض أن $b \setminus a$ و $a \setminus b$. إذاً $a = mb$ ، $b = na$ حيث $m, n \in Z$ ، وعليه فإن $a = mna$ ومنه ينتج أن $mn = 1$. إذاً $m = n = \mp 1$ حسب (أ)، وعليه فإن $a = \mp b$.

(هـ) بما أن $c \setminus a$ و $c \setminus b$ بالفرض، إذاً $a = mc$ ، $b = nc$ حيث $m, n \in Z$ ، وعليه فإن $ax = mcx = (mx)c$ لكل $x \in Z$ و $by = (nc)y = (ny)$ لكل $y \in Z$. إذاً $ax + by = (mx + ny)c$ لكن $mx + ny \in Z$. إذاً $c \setminus ax + by$.

مبرهنة (6):

اذا كان a, b, c اعداد صحيحة، وكان $a \setminus$ b و $b \setminus c$، فان $a \setminus c$.

البرهان:

بما انه $a \setminus b$ و $b \setminus c$، فانه يوجد أعداد صحيحة $k_1 \& k_2$ بحيث أن $b = k_1 a$ و $c = k_2 b$، وبالنتيجة فان $c = k_2(k_1 a)$، اذاً فان $a \setminus c$.

امثلـــة:

1- اذا كان $3 \setminus 6$ و $6 \setminus 18$، ولذا فأن $3 \setminus 18$.

2- اذا كان $5 \setminus 10$ و $3 \setminus 6$، ولذا فأن $3 \times 5 = 15$ يقسم $6 \times 10 = 60$.

3- اذا كان $3 \setminus 6$ و $3 \setminus 15$، ولذا فأن $3 \setminus (2 \times 6 + 4 \times 15)$.

4- اذا كان $2 \setminus 2-$ و $2- \setminus 2$، ومن ثم فأن $2 = -(-2)$.

مبرهنة (7) خوارزمية القسمة(Division Algorithm)

اذا كانت $a, b \in Z$ و $b \neq 0$ فيوجد عددين صحيحين وحيدين m, r بحيث أن $\boldsymbol{a = mb + r}$،$0 \leq r < |b|$. يسمى m خارج قسمة (quotient) العدد a على العدد b ويسمى العدد r باقي (remainder) القسمة.

امثلــة:

(أ) إذا كان $a = 57$ ، $b = 5$ ، فإن $a = 11b + 2$ ، $0 < 2 < 5$.

(ب) إذا كان $a = 81$ ، $b = -14$ ، فإن $a = -5b + 11$ ، $0 < 11 < |b|$.

(ج) إذا كان $a = -273$ ، $b = 17$ ، فإن $a = -17b + 16$ ، $0 < 16 < 17$.

(د) إذا كان $a = 24$ ، $b = 6$ ، فإن $a = 4b + 0$.

مبرهنة (8):

إذا كان a عددا صحيحا موجبا ، وكان $1 < b \in Z$ فــيمكن التعبيــر عــن a بطريقة وحيدة على الشكل $a = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0$ ، حيــث $a_n > 0$ ، $a_i \in \{0, 1, \cdots, b-1\}$.

تعريف:

لتكن $b \geq 2$ ، $0 < a \in Z$. يقال عــن $(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_b$ ، أنــه تمثيــل للعدد a بالنسبة للأساس b ، ونكتب $a = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_b$ إذا وجد $n \geq 0$ ، $a = \sum_{i=0}^{n} a_i b^i$ حيــث $a_i \in \{0, 1, \cdots, b-1\}$ ، $i = 0, 1, \cdots, n$. تــسمى a_i أرقــام (digits) العــدد a ، وإذا كــان $b = 2$ ، يــسمى التمثيــل التمثيل الثنائي (Binary Representation) والذي يــستخدم فــي الحاســبات ويكون $a_i \in \{0, 1\}$.

وإذا كان $b=3$ يسمى التمثيل التمثيل الثلاثي (Ternary Representation) وتكون $a_i \in \{0,1,2\}$.

وإذا كان $b=8$ يسمى التمثيل التمثيل الثماني (Octal Representation) وتكون $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

وإذا كان $b=10$ يسمى التمثيل التمثيل العشري (Decimal Representation) وتكون $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

وإذا كان $b=16$ يسمى التمثيل : التمثيل الستة عشري (Hexadecimal Representation) والذي يستخدم في علوم الحاسب وتكون $a_i \in \{0,1,2,\cdots,15\}$ ، وتستبدل الأعداد 10,11,12,13,14,15 بالحروف A,B,C,D,E,F على التوالي .

وإذا كان $b=60$ يسمى التمثيل الستيني الذي استخدمه البابليون وتكون $a_i \in \{0,1,2,\cdots,59\}$.

امثلـة: 1- عبر عن العدد 41 بدلالة الاساس b=2.

بمـا أن

41=20(2) +1

20=10(2) +0

10=5(2) +0

5=2(2) +1

2=1(2) +0

1=0(2) +1

$\therefore 41 = 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0$

$= (101001)_2$.

2- عبر عن العدد 21483 بدلالة الاساس b=8.

21483=2685(8) +3

2685=335(8) +5

335=41(8) +7

41=5(8) +1

5=0(8) +5

$\therefore 21483 = 5 \times 8^4 + 1 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 5 \times 8 + 3 \times 8^0$

$= (51753)_8$.

3- عبر عن العدد 61469 بدلالة الاساس b=16.

61469= 16(3841) + 13

3841= 16(240) + 1

240= 16(15) + 0

15= 16(0) + 15

$\therefore 61469 = 15 \times 16^3 + 0 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 13 \times 16^0$

$= F \times 16^3 + 0 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + D \times 16^0$

$= (F01D)_{16}$
