إن هذه الطريقة تعطي أعداداً ذوات طول دورة أكبر من طريقة أوسط المربع وأقل تحيزاً، إلا أن سلبيات طريقة أوسط التربيع لا تزال موجودة في هذه الطريقة.

المثال (1):

استخدم طريقة أوسط الضرب لتوليد عشرة أعداد عشوائية ذوات مرتبتين عشريتين مستخدما العددين البذرة X0=12 و X1=53.

الحل:

$X_0X_1=12\times53$

$=0636$, $\therefore X_2=63$

$X_1X_2=3339$, $\therefore X_3=33$

$X_2X_3=2079$, $\therefore X_4=07$

$X_3X_4=0231$, $\therefore X_5=23$

$X_4X_5=0161$, $\therefore X_6=16$

$X_5X_6=0368$, $\therefore X_7=36$

$X_6X_7=0576$, $\therefore X_8=57$

$X_7X_8=2052$, $\therefore X_9=05$

$X_8X_9=0285$, $\therefore X_{10}=28$

$X_9X_{10}=0140$, $\therefore X_{11}=14$

وبذلك تكون الأعداد العشوائية المولّدة على النحو الآتي:

{63, 33, 7, 23, 16, 36, 57, 5, 28, 14}.

تكامل المونت كارلو

Monte Carlo Integration:

يعدّ التكامل من الأدوات الرياضية البالغة الأهمية في مجالات شتى. ويوافق في العديد من الأحيان عدم إمكانية، أو صعوبة، إيجاد التكامل بالطرائق الرياضية التحليلية، فتظهر الحاجة الملحة لحسابه عدديا، وهذا ما يعرف بالتكامل العددي Numerical Integration. وهناك العديد من الطرائق التي تستخدم في التكامل العددي، مثل قاعدة منتصف المسافة Midpoint Rule وقاعدة شبه المنحرف Trapezoidal Rule وقاعدة سمبسون Simpson's Rule. إن جميع هذه الطرائق تتعامل مع متغيرات حتمية (غير عشوائية)، كما أنها تكون كفوءة في الأبعاد(*) القليلة فقط، لا تتجاوز البُعد الثالث.

إن طريقة تكامل المونت كارلو من طرائق المحاكاة العددية التي تُستخدم وبنجاح تام لإيجاد التكاملات العددية ولأي عدد من الأبعاد. وهي طريقة الملاذ الأخير، فإذا أخفقت كل الطرائق في إيجاد تكامل عددي، وبأي عدد من الأبعاد كان، فإن طريقة تكامل المونت كارلو تستطيع أن

(*) **يقصد بأبعاد التكامل عدد التكاملات: فالتكامل** $\int g(x)dx$ **أحادي البُعد، والتكامل** $\int\int g(x,y)dxdy$ **ثنائي البُعد، والتكامل** $\int\int\int g(x,y,z)dxdydz$ **ثلاثي البُعد.. الخ.**

تقدّم الحل المطلوب وبدقة مقبولة. تعود البداية الفعلية لهذه الطريقة إلى السنة 1947 للباحثين John von Neumann (1903-1957) و Nicholas Constantine Metropolis (1915-1999) و Stanislaw Ulam (19010-1986)، إذ استخدمت في مجال الرياضيات الفيزيائية لتقريب تكاملات معقدة ذوات أبعاد متعدّدة. كما أُستخدمت بالأعمال المبكرة المتعلقة بصناعة القنابل الهيدروجينية، ثم اتسعت استخداماتها لتشمل العديد من المجالات المتعلقة بالمفاعلات النووية والمبادلات الحرارية وتصميم محركات المركبات الفضائية ومعالجة الأمراض المزمنة، ومجالات أخرى في علوم الحياة فضلاً عن المجالات الرياضية والتقنية.

إن طريقة تكامل المونت كارلو تتميز بالسهولة والكفاءة، وان كفاءة هذه الطريقة تتجلى في الأبعاد الكبيرة على عكس طرائق التكامل العددية الأخرى التي تكون كفاءتها محصورة على الأبعاد الصغيرة. ولأهمية هذه الطريقة فسوف نتناولها في حالة البُعد الواحد والأبعاد المتعدّدة.

تكامل المونت كارلو ذي البُعد الواحد

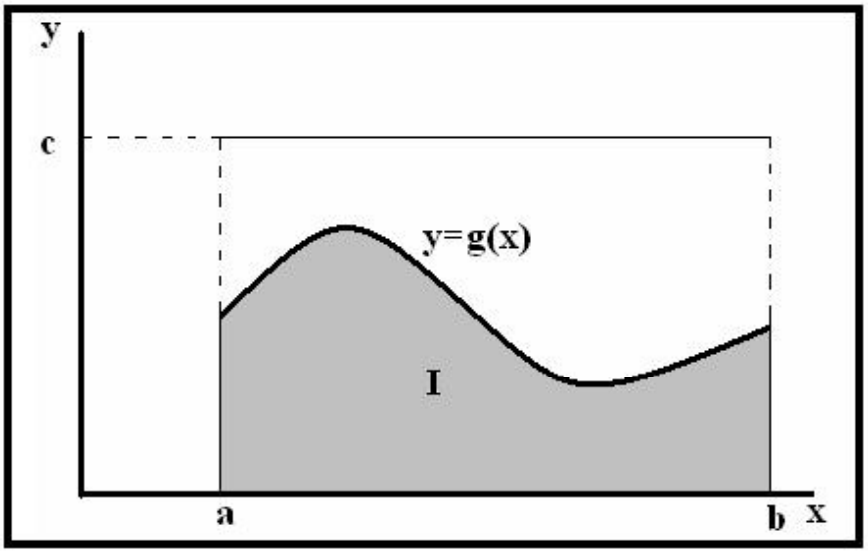
:One Dimensional Monte Carlo Integration

لنفرض أنه يراد إيجاد قيمة التكامل المحدود الآتي:

$$I = \int_a^b g(x)dx \qquad (1)$$

إذ إن g(.) هي دالة ما. وكما هو معروف رياضيا فإن هذا التكامل لا يمكن إيجاده دائما، بل إن هناك شروطاً معينة(*) يجب تحقيقها لهذا الغرض. لذا تظهر الحاجة للاستعانة بطرائق عددية، أو طرائق المحاكاة بوصفها الملاذ الأخير. وسنوضح الآن وبإيجاز طريقة تكامل المونت كارلو ذات البعد الواحد، انظر المصدر *السابق* للتفاصيل.

كما هو معروف فان التكامل $I = \int_a^b g(x)dx$ يمثل المساحة المضللة المحصورة بين محور السينات والمنحني y=g(x) والمستقيمين x=a و x=b، انظر الشكل الآتي.



الشكل (10–5): التكامل I يمثل المساحة المضللة.

وهناك عدة طرائق في المحاكاة يمكن استخدامها لإيجاد التكامل I. ومن أشهر هذه الطرائق ما يأتي:

أ– طريقة القبول– الرفض Acceptance-Rejection Method:

تتلخص هذه الطريقة بتوليد أعداد عشوائية تقع في المستطيل الذي قاعدته النقطتان a و b وارتفاعه c، ثم حساب نسبة النقاط الواقعة في المنطقة المضَللة، وهذه النسبة تمثل المساحة المطلوبة. والخوارزمية الآتية توضح خطوات هذه الطريقة.

الخوارزمية (3): إيجاد تكامل المونت كارلو الأحادي البُعد $I = \int_a^b g(x)dx$ بطريقة القبول – الرفض.

المُدخلات Input : n = عدد النقاط المُراد توليدها بالمحاكاة.

المُخرجات Output : المساحة التقريبية تحت المنحني y=g(x) في الفترة $a \le x \le b$، إذ إن $0 \le g(x) < c$.

الخطوة (1): ضع COUNTER=0.

الخطوة (2): للقيم i=1,2,3,…,n نفذ الخطوات (3)–(5).

الخطوة (3): احسب الاحداثيين العشوائيين x_i و y_i وبحيث يكون $a \le x_i \le b$ و $0 \le y_i < c$.

الخطوة (4): احسب $g(x_i)$.

الخطوة (5): إذا كانت $y_i \le g(x_i)$ اجعل:

COUNTER=COUNTER+1.

الخطوة (6): احسب المساحة المطلوبة من العلاقة الآتية:

Area=c(b-a) COUNTER/n.

الخطوة (7): تكون القيمة التقريبية للتكامل المطلوب هي I=Area.

ملاحظة:

1- يمكن تطوير الخوارزمية السابقة من أجل زيادة كفاءتها، انظر المصدر السابق للتفاصيل.

- يمكن برمجة الخوارزمية السابقة بيسر، ونترك ذلك للقارئ النجيب. ولغرض عدم الابتعاد عن المسار العام لهذا الفصل فسوف نكتفي بالطريقة الثانية الآتية لحساب تكامل المونت كارلو.

ب- الطريقة الإحصائية The Statistical Method: إن الفكرة العامة لهذه الطريقة تعتمد على مفاهيم إحصائية، وتتلخص بافتراض أن المتغير x يتبع التوزيع المنتظم في الفترة (a,b)، ثم بحساب القيمة المتوقعة للدالة y=g(x) ومساواتها بالمُقدّر الإحصائي للقيمة المتوقعة، ينتج مقدّر المونت كارلو الآتي للتكامل، انظر المصدر السابق للتفاصيل:

$$\hat{I} = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i). \qquad (2)$$

إذ إن $x_1, x_2, ..., x_n$ هي عبارة عن بيانات مولَّدة من التوزيع المنتظم في الفترة (a,b). والخوارزمية الآتية تقوم بحساب التكامل وفق هذه الطريقة.

الخوارزمية (4): إيجاد تكامل المونت كارلو الأحادي البُعد $I = \int_a^b g(x)dx$.

المُدخلات Input: الدالة g وحدود التكامل وحجم العينة المطلوب n.

المُخرجات Output: القيمة التقريبية للتكامل.

الخطوة (1): ولّد الأعداد العشوائية $x_1, x_2, ..., x_n$ من التوزيع المنتظم U(a,b)، إذ إن n تمثل حجم العينة المطلوب تقدير التكامل منها.

الخطوة (2): احسب المسافة بين حدي التكامل s = b-a.

الخطوة (3): احسب تكامل المونت كارلو من العلاقة (10-2).

مثال:

استخدم العدد البذرة x_0=23 لتوليد أربعة أعداد عشوائية وفق طريقة أوسط المربع، ثم استخدم الأعداد المولّدة لإيجاد القيمة التقريبية للتكامل الآتي يدويا باستخدام تكامل المونت كارلو

$$I = \int_{-5}^{5} x^2 dx$$

الحل:

Xo=23

23^2 =0529 , $\therefore X_1=52$

52^2=2704 , $\therefore X_2=70$

70^2=4900 , $\therefore X_3=90$

90^2=8100 , $\therefore X_4=10$

وحيث ان الأعداد المولّدة يجب أن تقع بين الصفر والواحد، لذا نقسم كل منها على 100، وبعد إهمال العدد البذرة، تكون الأعداد العشوائية المطلوبة هي

$$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}=\{0.52\,,\,0.70\,,\,\,0.90\,\,,0.10\,\}$$

والجدول الآتي يلخص طريقة إيجاد القيمة التقريبية للتكامل يدويا باستخدام تكامل المونت كارلو

i	u_i	$X_i=a+(b-a)u_i$	$g(xi)=x^2$
1	0.52	0.2	0.04
2	0.70	2	4
3	0.90	4	16
4	0.10	-4	16
			36.04

$$\hat{I}=\frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n}g(x_i).$$

$$\hat{I}=\frac{(5-(-5)}{4}36.04$$

$$=90.1$$

قيمة التكامل المضبوط

$$I=\int_{-5}^{5}x^2dx=83.333$$

ويمكن بسهولة ايجاد الخطا المئوي

P.E=8.12%

واجب

حساب التكامل الثنائي الأبعاد الآتي بالطريقة التحليلية (المضبوطة) وطريقة المونت كارلو بحجم عينة n=500، وكذلك حساب الخطأ المطلق والخطأ النسبي والخطأ المئوي:

$$I=\int_{-2}^{1}\int_{1}^{3}(4x^3+6xy^2)dxdy.$$