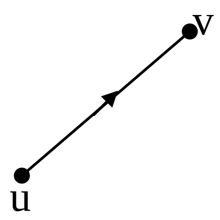
البيانات الموجهة (Directed Graphs) :

البيان الموجه D : هو زوج مرتب من مجموعة غير خالية V من عناصر تسمى الرؤوس مع مجموعة A من أزواج مرتبة من الرؤوس ، يطلق على كل زوج مرتب (u,v) ، حيث أن $u,v \in V$ **بحافة موجه (directed edge)** أو **قوس (arc)**، كما يعبر عن البيان الموجه بالزوج المرتب $D=(V,A)$، يرمز أحيانا لمجموعة رؤوس D بـ $V(D)$ ، ولمجموعة حافاته الموجهة بـ $A(D)$. رتبة البيان D هي بالتعريف $|V(D)|$ وحجمه هو $|A(D)|$، وقد نرمز لرتبة البيان D بالرمز $p(D)$ ولحجمه بالرمز $q(D)$. ويطلق على الحافة الموجه (u,u) في بيان موجه D اسم **لفة موجهة (direct loop)**.

إذا كانت $e=(u,v)$ حافة موجهة ، فأنه يطلق على u **رأس الابتداء (initial vertex)** ويطلق على v **رأس الانتهاء (terminal vertex)** للحافة الموجهة e. كما نقول أن e تصل من u إلى v ، وأن كلا من u و v يقع على e . يقال لبيان موجه $D=(V,A)$ أنه بيان موجه-h إذا لم يتكرر أي عنصر من عناصر $V \times V$ أكثر من h من المرات في مجموعة الحافات الموجهة A، كما يقال لبيان موجه D أنه بيان بسيط إذا كان بيان موجه-1 وليس فيه لفة موجهة.

يكون البيان الموجه D معينا إذا علمنا مجموعة رؤوسه ومجموعة أقواسه. ويمكن تمثيل البيان الموجه $D=(V,A)$ بمخطط فيه كل رأس يتمثل بدائرة صغيرة واحدة فقط وكل قوس (u,v) يتمثل بخط مستقيم أو منحني بسيط يصل u إلى v, أي له اتجاه من u إلى v.

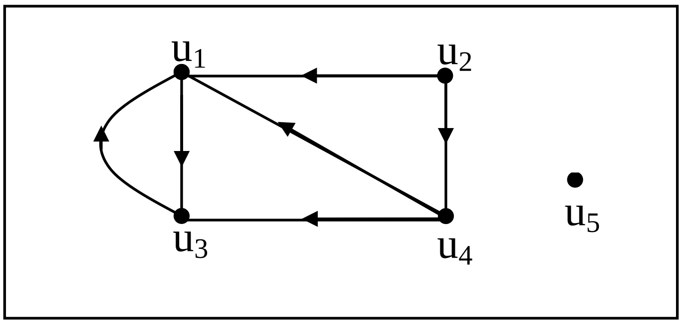


مثال 1: إذا كان D بيانا موجها له

$$V(D)=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\},$$

$$E(D)=\{(u_1,u_3),(u_2,u_1),(u_3,u_1),(u_2,u_4),(u_4,u_3),(u_4,u_1)\}.$$

فان رسمه هو ذلك المبين في الشكل $(1-4)$.



الشكل $(1-4)$

لكل رأس v في بيان موجه D له ثلاثة أنواع من الدرجات وهي الدرجة الخارجية يرمز لها $\operatorname{od} v$ وهي عدد الرؤوس في D المتجاورة من v, والدرجة الداخلية ويرمز لها $\operatorname{id} v$ وهي عدد الرؤوس في D المتجاورة إلى v، أما درجة الرأس v ويرمز لها $\deg v$ فهي مجموعة الدرجتين الداخلية والخارجية للرأس v, أي أن $\deg v = \operatorname{od} v + \operatorname{id} v$.

فمثلا ، إذا أخذنا البيان الموجه D في الشكل $(1-4)$، فنجد إن:

$\operatorname{od} u_1 = 1,\quad \operatorname{id} u_1 = 3,\quad \deg u_1 = 4,$
$\operatorname{od} u_2 = 2,\quad \operatorname{id} u_2 = 0,\quad \deg u_2 = 2,$
$\operatorname{od} u_3 = 1,\quad \operatorname{id} u_3 = 2,\quad \deg u_3 = 3,$
$\operatorname{od} u_4 = 2,\quad \operatorname{id} u_4 = 1,\quad \deg u_4 = 3,$
$\operatorname{od} u_5 = 0,\quad \operatorname{id} u_5 = 0,\quad \deg u_5 = 0,$

نلاحظ من المثال السابق أن مجموع الدرجات الخارجية هي 6 والتي تساوي مجموع الدرجات الداخلية وتساوي حجم البيان الموجه D . وهذه حقيقة صحيحة لكل بيان موجه D لان كل قوس يسهم في مجموع الدرجات الخارجية بواحد فقط ويساهم بواحد فقط في مجموع الدرجات الداخلية . وبهذا فان لدينا المبرهنة :

مبرهنة 1.4: إذا كانت $V(D)=\{v_1,v_2,v_3,\ \dots\ ,u_p\}$ ، فان

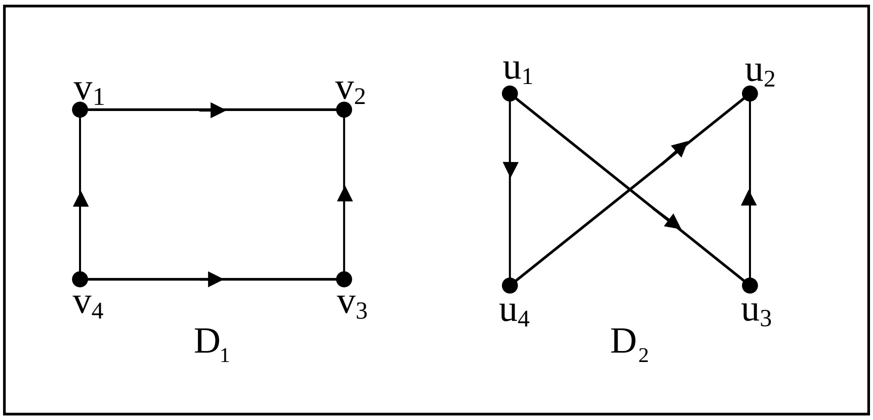
$$\sum_{i=1}^{p} od\, v_i = \sum_{i=1}^{p} id\, v_i = |A(D)| \ .$$

يقال للبيان الموجه D_1 انه **متشاكل مع** البيان الموجه D_2 إذا وجد تقابل متباين بين $V(D_1)$ و $V(D_2)$ ، $(f:V(D_1)\rightarrow V(D_2))$ يحقق الشرط

$$(u,v)\in A(D_1)\rightarrow (fu,fv)\in A(D_2)$$

وعندئذ نكتب $D_1\cong D_2$.

المثال 2 : هل البيانان الموجهان D_1 و D_2 الموضحان بالشكل (4−2) متشاكلان



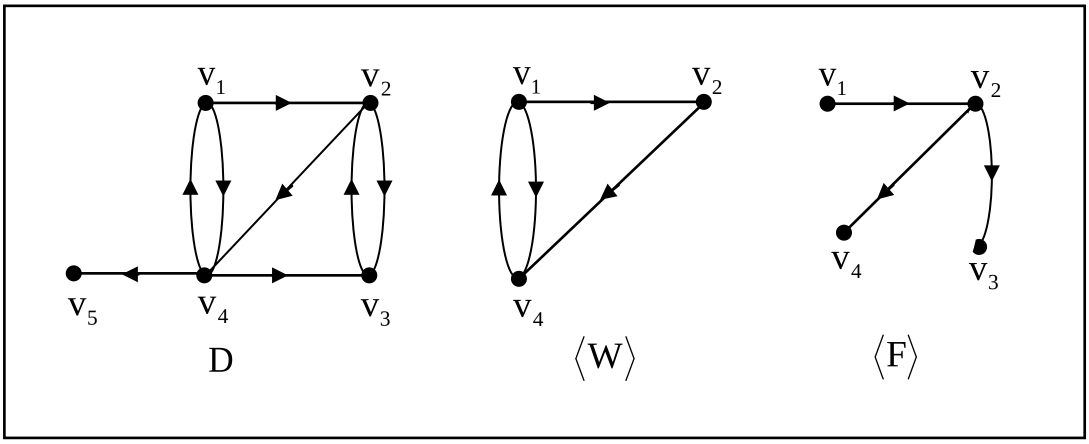
الشكل (4−2)

الحل : لتكن $f:V(D_1)\rightarrow V(D_2)$ ، بحيث أن إذ أن التقابل هو $f(v_1)=u_3$، $f(v_2)=u_2$، $f(v_3)\leftrightarrow u_4$ ، $f(v_4)=u_1$، إذا $D_1\cong D_2$.

كما يقال للبيانين الموجهين D_1 و D_2 أنهما متطابقان $D_1 = D_2$, إذا وفقط إذا كان $V(D_1) = V(D_2)$ و $A(D_1) = A(D_2)$. و يقال للبيان الموجه D' انه بيان موجه جزئي من البيان الموجه D إذا وفقط إذا كان $V(D') \subseteq V(D)$ و $A(D') \subseteq A(D)$ ، كما يقال أنه بيان موجه جزئي مولد إذا وفقط إذا كان $V(D') = V(D)$.

إذا كان v رأسا في البيان الموجه D، فان $D - v$ هو بيان جزئي موجه نحصل عليه من D بإزالة الرأس v مع كل الأقواس الواقعة عليه. وإذا كانت W مجموعة غير خالية من رؤوس D فان $\langle W \rangle$ هو بيان جزئي موجه من D يتكون من كل الرؤوس في W مع كل الأقواس التي تصل رأسين من الرؤوس في W. يطلق على $\langle W \rangle$ بيان موجه جزئي مستحث. وإذا كانت F مجموعة غير خالية من أقواس D فان $\langle F \rangle$ هو بيان جزئي مستحث مجموعة أقواسه هي F ومجموعة رؤوسه هي كل رؤوس D التي يقع كل منها على قوس واحد في الأقل من الأقواس في F (لاحظ الشكل (4-3)), حيث أن

$W = \{v_1, v_2, v_4\}$, $F = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_2, v_3)\}$,



الشكل (4-3)

نستعرض فيما يأتي بعض أصناف البيانات الموجهة :

يقال للبيان الموجه D انه **متناظر** (symmetric) إذا وفقط إذا كان:

$(u,v) \in A(D) \Leftarrow (v,u) \in A(D)$.

يقال للبيان الموجه D انه **لا تناظري** (anti-symmetric) إذا وفقط إذا كان:

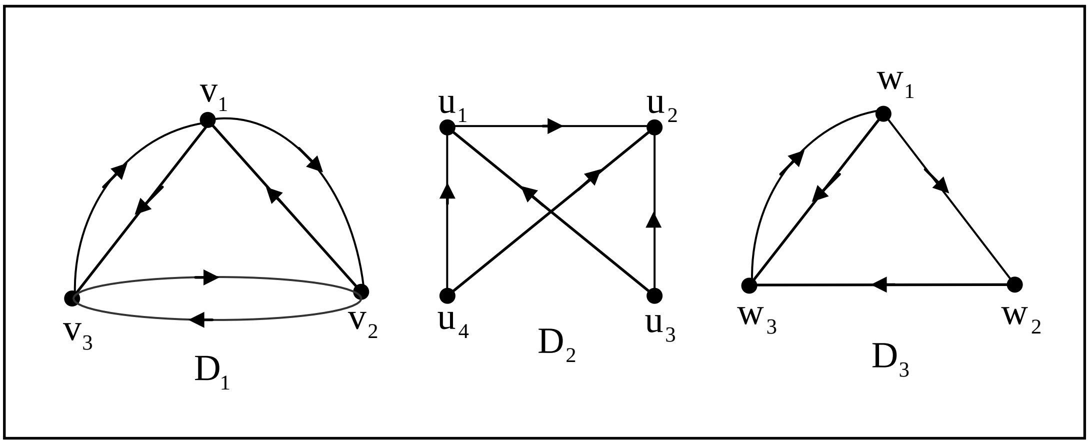
$(u,v) \in A(D) \Leftarrow (v,u) \notin A(D)$.

نلاحظ أن كل بيان لا تناظري هو بيان غير متناظر ، ولكن العكس غير صحيح .

يقال للبيان الموجه D انه منتظم بالدرجة r إذا كان لكل رأس v في D يكون

$\mathrm{od}\, v = \mathrm{id}\, v = r$.

مثال 3 : ليكن كلا من D_1 و D_2 و D_3 بيانات موجهة موضحة بالشكل (4−4).



الشكل (4−4)

البيان D_1 هو بيان متناظر ، البيان D_2 هو بيان لا تناظري ، أما البيان D_3 هو بيان ليس متناظر وغير لا تناظري ، وأخيرا، البيان الموجهة D_1 هو بيان منتظم من الدرجة 2.

تمارين :

1. إعط مثالا لبيان موجه متناظر ، ولبيان موجه لا تناظري .
2. لتكن $V(D)=\{v_1, v_2, v_3, \ \dots \ , v_p\}$ مجموعة رؤوس بيان موجه D، أثبت أن

$$\sum_{i=1}^{p} od\, v_i = \sum_{i=1}^{p} id\, v_i = |A(D)| \ .$$

3. أثبت أن هنالك بالضبط 16 بيانا موجها بسيطا بثلاثة رؤوس غير متشاكلة مثنى مثنى .
4. لتكن $V(D)=\{v_1, v_2, v_3, \ \dots \ , v_8\}$ مجموعة رؤوس بيان موجه بسيط D، جد مجموعة حافاته الموجهة A إذا علمت أن $(v_i, v_j) \in A(D)$ إذا وفقط إذا $i > j$. ارسم البيان الموجه D .
5. جد درجات الرؤوس الداخلة والخارجة و درجات الرؤوس للبيان الموجه D الموضح في الشكل (3−3).

ملاحظة : عدد البيانات الجزئية (بيانات موجهة وغير موجهة) ومن ضمنها المتشاكلة بعضها مع بعض هي 2^q **بيانا جزئيا ، حيث أن** q **يمثل عدد حافات البيانات** G .