الفصـل الخامـس

نمذجة التغيير بالمعادلات الفرقية

Modeling Change By Difference Equations

5-1 مقدمة:

يتناول هذا الفصل مسألة النمذجة الرياضية الحتمية للتغيير. إذ يتم التعامل مع متتاليات ومتغيرات حتمية تتغيّر بتغيّر دليل متقطع آخر، كالزمن مثلا. وتُدرس المعادلات الفرقية وطرائق حلولها بوصفها الأداة الفاعلة للمعالجة الرياضية للموضوع. كما وتدرس المعادلات الفرقية الخطية ذوات المعاملات الثابتة من المَرتبة الأولى لكون التطبيقات المُتناولة في هذا الفصل ترتكز أساسا عليها. وبعد طرح الإطار النظري للموضوع، تُدرس عدد من التطبيقات بشيء من التفصيل من الجانبين النظري والحاسوبي.

5-2 المتتاليات والنُظم الحركية

:Sequences and Dynamical Systems

تُعرّف المتتالية في الرياضيات بأنها مجموعة مُرتّبة من الأشياء (العناصر)، لاسيما من الأعداد، وتكون إما منتهية أو قابلة للعد (عدودة)، ومن ثم يمكن بالتالي تدليلها (فهرستها) بواسطة الأعداد الطبيعية Natural Numbers أو قطعة منتهية منها. وفي النمذجة الرياضية يستخدم التعريف الآتي للمتتاليات.

التعريف(5-1):

المتتاليـة Sequence هـي دالـة منطلقهـا Domain (أي مُـدخلاتها Input) مجموعـة الأعـداد الطبيعية $N=\{0,1,2,\ldots\}$ ومداها Range (أي مخرجاتها Output) مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

ملاحظة:

1- سوف نرمز لأسماء المتتابعات بالحروف اللاتينية الكبيرة، A,B,C,...,X,Y,Z ، في حين أن حدود (عناصر) المتتابعات سوف يُرمز لها بالحروف الصغيرة المقابلة، a,b,c,…,x,y,z، محصورة بين قوسين متوسطين. على سبيل المثال:

$A=\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$, $A=\{a_n: n\in N\}$, $A=\{a_n\}$.

وإن a_0 يمثل الحد الأول من المتتالية، و a_1 يمثل الحد الثاني من المتتالي، والخ.

2- عندما نكتب أن $A=\{a_n\}$، فإننا نعني أن a_n هي دالة بدلالة الدليل (الموقع) n، ولتكن:

$a_n=f(n)$; $n=0,1,2,\ldots$

فمثلا لو كانت $a_n=(n+1)/(n^2+3)$، فمن الممكن حساب قيمة a_n عند أي قيمة معطاة من n.
فمثلا: $a_0=1/3$، و $a_1=1/2$، $a_2=3/7$، و $a_{10}=11/103$ و $a_{100}=101/10003$. فكما هو واضح، يمكن إيجاد أي عنصر من عناصر هذه المتتالية إذا عُلم موقعه.

التعريف(5-2):

النظام الحركي Dynamical System عبارة عن علاقة رياضية بين حدود متتالية.

ملاحظة:

1- طالما أن النظام الحركي هو علاقة رياضية بين حدود متتالية، لذا يتميز أي نظام حركي بكون منطلقه Domain ومداه Range متماثلان.

2- يطلق أيضا على النظام الحركي ذي الزمن المتقطع تسمية **تطبيق Map**. لذا فإن **التطبيق** هو عبارة عن دالة فضاء منطلقها ومداها متماثلين. ونشير إلى أن الفصل العشرين مُخصص لدراس النظم الحركية المتقطعة بشيئ من التفصيل.

المثال(5-1):

اكتب أول خمسة حدود للمتتاليات المولّدة من كل من النماذج الآتية:

i- $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n \ ;n\in N \\ a_0=1. \end{cases}$

ii- $\begin{cases} b_{n+1}=2b_n+3 \ ;n\in N \\ b_0=0. \end{cases}$

iii- $\begin{cases} c_{n+1}=c_n(c_n+1);n\in N \\ c_0=2. \end{cases}$

iv- $\begin{cases} d_{n+1}=2d_n^{\,2} \ ;n\in N \\ d_0=1. \end{cases}$

$V-\Delta a_n=\frac{1}{2}\,a_n \ ;\mathrm{n}=1,2,3,....$

$\mathrm{a_o}=1.$

$Vi-\Delta b_n=-\frac{1}{3}\,\mathrm{b_n} \ ;\mathrm{n}=1,2,3,...$

$\mathrm{a_o}=3.$

الحل:

i- A={1,2,4,8,16,…}.

ii- B={0,3,9,21,45,…}.

iii- C={2,6,42,1806,3263442,…}.

iv- D={1,2,8,128,32768,…}.

المثال (5–2):

اكتب النموذج الرياضي للنظام الحركي لكل من المتتاليات الآتية:

i- A={1,3,5,7,9,…}.

ii- B={1,3,7,15,31,…}.

iii- C={2,4,16,256,…}.

iv- $D=\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},..\}$

الحل:

i- $\begin{matrix} a_{n+1}=2+a_n;\ n\in N \\ a_0=1. \end{matrix}$

ii- $\begin{matrix} b_{n+1}=1+2b_n;\ n\in N \\ b_0=1. \end{matrix}$

iii- $\begin{matrix} c_{n+1}=c_n{}^2;\ n\in N \\ c_0=2. \end{matrix}$

iv- $d_n=\frac{1}{2^{n+1}};\ n\in N$

5–3 نموذج سهل في نمذجة التغيير

:A Simple Model in Modeling Change

لو تأملنا في العديد من الظواهر بداخل أجسامنا، مثل ضغط الدم ونسبة السكّر بالدم، والظواهر التي في عالمنا، مثل التغيرات المناخية وتقلبات أسعار السلع والمواد المختلفة، نجد أن العديد من هذه الظواهر يمكن نمذجتها وفق النموذج العام الآتي:

القيمة المستقبلية = القيمة الحالية + تغيير
Future Value =Present Value +Change

إذ إن "التغيير" يمثل مقدار الفرق بين "القيمة المستقبلية" عن "القيمة الحالية"، ويكون عادة في الظروف الطبيعية ذا قيمة صغيرة مقارنة بالقيمة الحالية والقيمة المستقبلية.

كما هو معروف فإن الذي يحدد الماضي والحاضر والمستقبل هو عامل الزمن Time. فالزمن الذي نعيشه الآن هو "الحاضر Present"، والزمن الذي مضى وانقضى هو "الماضي Past"، والزمن القادم هو "المستقبل Future". فلو كان n يمثل دليل الزمن Time Index، فإن n سوف يُعدّ مُعبّرا عن الحاضر، في حين أن، ولأي عدد أكبر من الصفر k، n-k يُعبّر عن الماضي، و n+k يُعبّر عن المستقبل، وكما موضح في الشكل الآتي.

Past الماضي	Present الحاضر	Future المستقبل
n-k	n	n+k

إن عامل الزمن الذي يُدرس يكون عادة بهيئتين: الأولى عندما يأخذ قيماً مستمرة (متصلة) على شكل أعداد حقيقية Real Numbers، وفي مثل هذه الحالة تُستخدم عادةً المعادلات التفاضلية Differential Equations لنمذجة التغيير، انظر الباب الثالث. أما الهيئة الثانية فهي عندما يأخذ الزمن قيما متقطعة (منفصلة) بشكل أعداد صحيحة غير سالبة، تنتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية $N=\{0,1,2,\ldots\}$، وعندئذ تستخدم المعادلات الفرقيّة Difference Equations لنمذجة التغيير، وهذا ما سيتناوله هذا الباب.

المثال (5-3):

إذا كان مقدار النمو في حجم مجتمع البوم Owls في بيئة معينة هو 2% لكل عام. فلو كان حجم مجتمع البوم في تلك البيئة في إحدى السنين هو 100 بومة، جد النموذج الرياضي المعبّر عن التغيير حجم مجتمع البوم في تلك البيئة، ثم أستخدم النموذج للتنبؤ بأعداد البوم في تلك البيئة للسنوات الخمس القادمة.

الحل:

نفرض أن المتغير O_n يرمز إلى حجم مجتمع البوم في تلك البيئة في السنة n. وكما هو واضح من معطيات هذا المثال أن:

حجم مجتمع البوم في السنة القادمة = حجمه في السنة الحالية + التغيير

أي إن:

$$O_{n+1} = O_n + 0.02O_n$$

فيكون النموذج الرياضي للنظام الحركي المتعلق بهذا المثال هو:

$$O_{n+1} = 1.02O_n;\ n \in N$$
$$O_0 = 100.$$

والجدول الآتي يبين أعداد البوم المتنبأ بها في تلك البيئة للسنوات الخمس القادمة (بعد تقريبها إلى أقرب عدد صحيح).

السنة n	0	1	2	3	4	5
أعداد البوم O_n	100	102	104	106	108	110

5-4 مؤثّر الفرق Difference Operator: