المحاضرة الرابعة

مبرهنة (9):

(أ) اذا كانت $a, m \in Z$، فاما $a^2 = 4m$ أو $a^2 = 4m + 1$.

(ب) اذا كان a عدداً صحيحاً فردياً فان $a = 4m + 1$ أو $a = 4m + 3$ حيث ان $m \in Z$ وان $a^2 = 8n + 1$ لكل $n \in Z$.

(ج) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in Z, \forall n \in Z$.

البرهان:

(ا) بقسمة a على 2، يوجد عددين صحيحين r, n بحيث ان $a = 2n + r$،

$0 \leq r < 2$ وعليه فان r=0,1.

اذا كان r=0، فـأن a=2n، اذا $a^2 = 4n^2 \Leftarrow a^2 = 4m$، حيث أن $n^2 = m$.

اما اذا كان r=1، فأن a=2n+1، اذا $a^2 = 4(n^2 + n) + 1 \Leftarrow a^2 = 4m + 1$

حيث أن $m = n^2 + n$.

(ب) بما أن $a = 4m + r$، $0 \leq r < 4$، حسب مبرهنة خوارزمية القسمة. اذاً r=0, 1, 2, 3 وعليهِ فأن a= $4m$ أو a=4m+1 أو a=4m+2 أو a=4m+3.

لكن a عدداً فردياً بالفرض.

اذأ، اما a=4m+1 أو a=4m+3.

فاذا كان a=4m+1، فأن

$$a^2 = 8(2m^2 + m) + 1 \Rightarrow a^2 = 8n + 1$$

حيث ان $n = 2m^2 + m$.

اما إذا كان a=4m+3، فأن

$$a^2 = 8(2m^2 + 3m + 1) + 1 \Rightarrow a^2 = 8n + 1$$

حيث ان $n = 2m^2 + 3m + 1$.

(ج) بقسمة n على 6، فانه يوجد $m, r \in Z$ بحيث أن n=6m+r و $0 \leq r < 6$، وعليهِ فأن r=0, 1, 2, 3, 4, 5.

- إذا كان r=0، فـان n=6m، وعليه فـأن:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{6m(6m+1)(12m+1)}{6}$$
$$= m(6m+1)(12m+1) \in Z$$

- إذا كان r=1، فـان n=6m+1، وعليه فـأن:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(6m+1)(6m+2)(12m+3)}{6}$$
$$= (6m+1)(3m+1)(4m+1) \in Z \ .$$

- إذا كان r=2، فـان n=6m+2، وعليه فـأن:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(6m+2)(6m+3)(12m+5)}{6}$$
$$= (3m+1)(2m+1)(12m+1) \in Z$$

- إذا كان r=3، فـان n=6m+3، وعليه فـأن:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(6m+3)(6m+4)(12m+7)}{6}$$
$$= (2m+1)(3m+2)(12m+7) \in Z$$

- إذا كان r=4، فـان n=6m+4، وعليه فـأن:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(6m+4)(6m+5)(12m+9)}{6}$$
$$= (3m+2)(6m+5)(4m+3) \in Z$$

- إذا كان r=5، فـان n=6m+5، وعليه فـأن:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(6m+5)(6m+6)(12m+11)}{6}$$
$$= (6m+5)(m+1)(12m+11) \in Z$$

أذاً $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in Z, \forall n \in Z$

مثال: لنفرض أننا نريد أن نثبت أن $n^3 - n$ ، يقبل القسمة على 3.

الحل: لدراسة قابلية قسمة المقدار $n^3 - n$ على 3، علينا دراسة الاشكال الثلاثة: $n = 3k$، $n = 3k + 1$، $n = 3k + 2$.

$$n = 3k: \quad (3k)^3 - 3k = 27k^3 - 3k = 3(9k^3 - k),$$
$$n = 3k+1: \quad (3k+1)^3 - (3k+1) = 27k^3 + 9k^2 + 3k + 1 - 3k - 1 = 3(9k^3 - 3k),$$
$$n = 3k+2: \quad (3k+2)^3 - (3k+2) = 27k^3 + 18k^2 + 12k + 8 - 3k - 2 = 3(9k^3 + 6k^2 + 3k + 2).$$

نرى أنه في كل حالة ، $n^3 - n$ قابل للقسمة على 3. بواسطة خوارزمية القسمة، هذه هي الحالات الوحيدة التي نحتاجها للتحقق، لأن كل عدد صحيح يجب أن يكون من أحد هذه الأشكال الثلاثة

:H.W.

1- عبر عن الاعداد 179 ,527 ,13429 ,31535، بدلالة b=2, b=7, b=8, b=12, b=16, b=19.

2- اوجد الباقي من قسمة (17) على (-7).
