النمذجة التصادفية للنظم الحركية

Stochastic Modeling of Dynamical Systems

مقدمة:

هناك اهتمامات واسعة في المجالات التطبيقية المختلفة لدراسة العلاقات الموجودة في مشاهدات تتغير تبع تغير الزمن أو أي دليل آخر. والظاهرة التي تتغير بتغير دليل آخر، كالزمن مثلا، تعدّ نظاماً حياً يتسم بالحركة. إن دراسة النظام الحركي تكون من خلال أدوات رياضية مختلفة، كالمتتاليات Sequences والمعادلات الفرقية والمعادلات التفاضلية.

لقد تناول الفصل الخامس دراسة المتتاليات والنظم الحركية من الجانب الرياضي الحتمي. أما هذا الفصل فيتناول الجانب التصادفي (الاحتمالي) من هذا الموضوع المهم. يتضمن هذا الفصل مجالين من النمذجة التصادفية (الاحتمالية): خُصص المجال الأول للنمذجة الماركوفية، فبعد إعطاء فكرة موجزة عن النمذجة الماركوفية، يُعرض الموضوع من خلال دراسة حالات مختلفة. أما المجال الثاني فيتناول نمذجة وُثوقية الأنظمة، وهو موضوع ذو طابع تقني يستخدم لدراسة مقدار الثقة التي نوليها للأنظمة المختلفة.

إن المصادر الرئيسة لهذا الفصل هي:

النمذجة الماركوفية للنظم الحركية:

يعدّ النموذج الماركوفي من النماذج الرياضية الاحتمالية الشائعة وله تطبيقات في شتى المجالات. يتضمن هذا النموذج عنصرين أساسين، هما:

1- **الحالات States:** وهي عبارة عن عدد محدود من العائدات Outcomes الممكنة للظاهرة قيد الدراسة في أي وقت. هذه الحالات قد تأخذ قيما عددية، أو أسماء حَرفية. وتسمى المجموعة التي تضم جميع الحالات الممكنة **فضاء العينة Sample Space**، ويرمز لها S. أما المجموعة التي تضم القيم الممكنة للدليل (الزمن) فتسمى **فضاء المعلمة Parameter Space**. وغالبا ما يمثل فضاء المعلمة مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة، $\{0,1,2,\ldots\}$.

2- **المصفوفة الانتقالية** Transition Matrix:

إن سمة النظام الحركي أنه يتحرك من حالة إلى أخرى. وإن الفرضية الأساسية في النموذج الماركوفي هي أن حدوث حالة ما في وقت ما يعتمد فقط على الحالة السابقة، وتعرف هذه بالخاصية الماركوفية. إن المصفوفة التي تضم احتمالات الانتقال من الحالة السابقة إلى الحالة الحالية تسمى

المصفوفة الانتقالية، ويرمز لها $\underline{P}$. إن عناصر المصفوفة الانتقالية تكون قيما حقيقية تقع بين الصفر والواحد، كما أن مجموع كل صف في هذه المصفوفة يجب أن يساوي 1. إن الشكل العام للمصفوفة الانتقالية ذات الخطوة الواحدة يكون كما يأتي:

$$\underline{P} = \begin{array}{c} \\ X_{n-1}=1 \\ 2 \\ . \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_n=1 & 2 & \cdots & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ . & . & \cdots & . \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix} \end{array}.$$

إذ إن المتغير X_{n-1} يمثل الحالة السابقة عند الزمن n-1، في حين أن X_n يمثل الحالة الحالية عند الزمن n.

عادة يُمثّل النموذج الماركوفي بمخطط يطلق عليه **المخطط الانتقالي Transition Diagram**. والمخطط الانتقالي هو أداة بيانية تُستخدم لتمثيل الانتقالات بين الحالات. ورياضيا فإن المخطط الانتقالي عبارة عن بيان موجّه Directed Graph تُمثل الحالات رؤوسه Vertices والتي تكون عادة على شكل دوائر، في حين أن الاحتمالات الانتقالية تُمثل حافات البيان Edges والتي تكون بشكل أسهم .

إن $\underline{P}^n$ تمثل المصفوفة الانتقالية ذات الـ n خطوات، أما $\underline{\pi} = \lim_{n\to\infty} \underline{P}^n$، إذا كانت الغاية موجودة، فيمثل متجه الاحتمالات المتزنة Equilibrium Probabilities (أو الاحتمالات المُراوحة Stationary Probabilities لكونها ستراوح في مكانها)، وهي احتمالات (أوزان) الحالات بعد أمد بعيد. فلو كان

$S = \{s_1, s_2, ..., s_N\}$، فان متجه الاحتمالات المتزنة يكون بشكل $\underline{\pi} = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_N)$، إذ إن $\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_N = 1$. أما مقلوب الاحتمالات المتزنة $T_i = 1/\pi_i;\ i = 1,2,...,N$ فيمثل معدل زمن العودة إلى الحالة s_i بعد أمد بعيد، ويسمى أيضا معدل الزمن المتواتر Mean Recurrence Time.

دراسة حالة: نمذجة حركة النقل:

شركة لسيارات الأجرة تقوم بنقل المسافرين من وإلى المدينتين A و B. ومن خلال سجلات الشركة تبين أنه في 60% من الأيام تعود السيارة المؤجرة في مدينة A في اليوم نفسه إلى المدينة A، وفي 40% من الأيام فإنها تبيت إلى اليوم التالي في المدينة B. كذلك وجد أنه في 70% من الأيام تعود السيارة المؤجرة في مدينة B في اليوم نفسه إلى المدينة B، وفي 30% من الأيام تبيت إلى اليوم التالي في المدينة A.

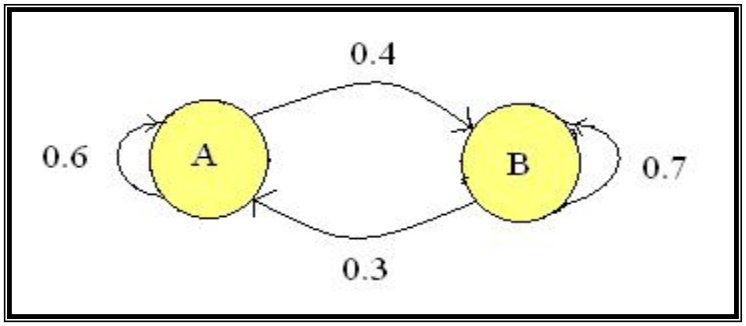
أ- نمذج عدد السيارات المتواجدة يوميا لهذه الشركة في المدينتين A و B من خلال نموذج حركي. احسب هذا العدد عندما يكون العدد الأولي للسيارات في المدينة A: 16 وفي المدينة B: 12. ما هو العدد الذي سيؤول إليه عدد سيارات هذه الشركة في المدينتين بعد زمن طويل إذا استمر الانتقال بين المدينتين على هذا النمط؟

ب- نمذج هذه المسألة بوصفها سلسلة ماركوفية مؤلفة من حالتين تمثلان المدينة التي تكون فيها كل سيارة يوميا. جد المصفوفة الانتقالية وكذلك التوزيع المتزن.

ت- قارن بين أ و ب.

الحل:

أ- نفرض أن المتغير a_n يمثل عدد سيارات الشركة التي سوف تبقى في المدينة A عند نهاية اليوم n، و نفرض أن b_n يمثل عدد سيارات الشركة والتي سوف تبقى في المدينة B عند نهاية اليوم n. والشكل الآتي، ويعرف بالمخطط الانتقالي Transition Diagram ، يبن المخطط الانتقالي لحركة السيارات بين المدينتين.



الشكل (1): المخطط الانتقالي لحركة السيارات بين المدينتين A وB.

ومن معطيات المسألة والمخطط الانتقالي يمكننا أن نستنتج وبيسر أن النموذج الحركي لعدد السيارات المتواجدة يوميا لهذه الشركة في المدينتين A و B على النحو الآتي:

$$a_{n+1} = 0.6a_n + 0.3b_n;\ n = 0,1,2,3,....$$
$$b_{n+1} = 0.4a_n + 0.7b_n;\ n = 0,1,2,3,....$$
$$a_0 = 16,\ b_0 = 12.$$

لاحظ أن مجموع معاملات كل من a_n و b_n يساوي دائما 1. ويمكن الاستفادة وبيسر من النموذج الحركي السابق لحساب عدد السيارات في المدينتين في الأيام التالية وذلك بالتعويض المتتالي في النموذج. وهذه العملية يمكن إيضاحها بالبرنامج الآتي، واسمه **RentalCompany**.

```
%Car Rental Company
clear; clc
x(1)=0;a(1)=16;b(1)=12;nmax=11;
for n=1: nmax
  x(n+1)=n;
  a(n+1)=0.6*a(n)+0.3*b(n);
  b(n+1)=0.4*a(n)+0.7*b(n);
end
disp([' n    a(n)   b(n)'])
disp([x',a',b'])
FixedVector=[a(nmax) b(nmax)]'
plot(x,a, 'ks',x,b,'ko')
xlabel('Day n')
ylabel('Number of Cars')
grid on
```

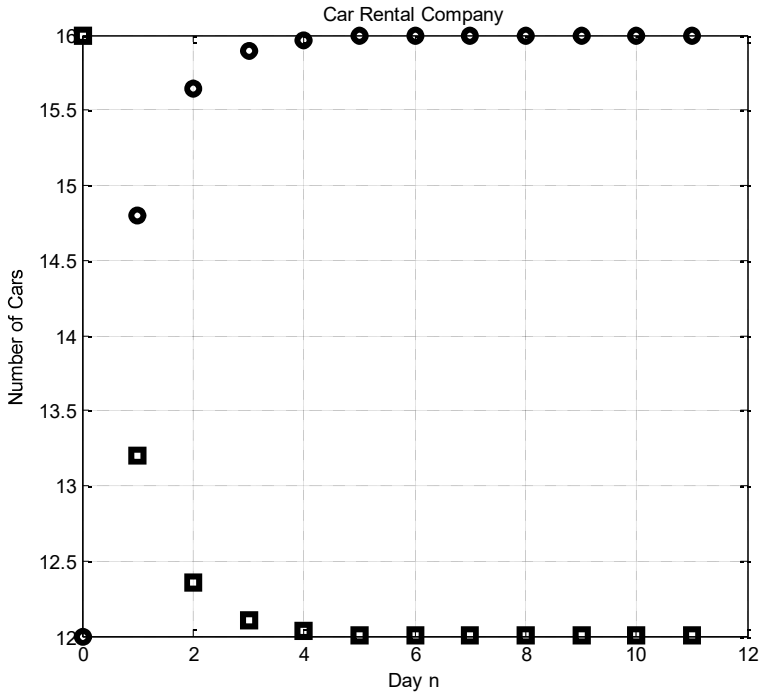
ونتائج البرنامج العددية والبيانية كالآتي:

```
   n     a(n)     b(n)
   0    16.0000  12.0000
 1.0000  13.2000  14.8000

 2.0000  12.3600  15.6400
 3.0000  12.1080  15.8920
 4.0000  12.0324  15.9676
 5.0000  12.0097  15.9903
 6.0000  12.0029  15.9971
 7.0000  12.0009  15.9991
 8.0000  12.0003  15.9997
 9.0000  12.0001  15.9999
 10.0000  12.0000  16.0000
 11.0000  12.0000  16.0000

FixedVector =

 12.0000
 16.0000
```



ان النتائج العددية يتضح أن العدد الذي سيؤول إليه عدد سيارات هذه الشركة في المدينتين، إذا استمر الانتقال على هذا النمط، هو 12 سيارة في المدينة A و 16 سيارة في المدينة B. أي إن نسبة سيارات هذه الشركة في المدينة A بالنسبة إلى المدينة B ستكون بالنهاية كنسبة 12/16، أي كنسبة 3/4.

ويمكن الحصول على النسبة السابقة جبريا وكما يأتي. لو فرضنا أن $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ و $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ يمثلان النقطة الثابتة لكل من a_n و b_n، على

التوالي. وبأخذ غاية طرفي المعادلة الأولى من النموذج الحركي عندما تقترب n من المالانهاية نجد أن:

$$a = 0.6a + 0.3b.$$

أي إن $a/b = 3/4$. وبالقيام بالإجراءات نفسها على المعادلة الثانية من النموذج الحركي نحصل على نتيجة مماثلة. إن النقطتين الثابتتين a و b تمثلان القيمتين اللتين سوف يؤول إليها النظام الحركي بعد زمن طويل، لذا فإن المتجه $(a \quad b)' = (12 \quad 16)'$ يمثل المتجه الثابت.

ب- نفرض الآن أن المتغير X_n يمثل المدينة التي ستكون فيها سيارة معينة من سيارات هذه الشركة في اليوم n. فإن $\{X_n\}$ هي سلسلة ماركوفية بفضاء حالة S={A,B} وبفضاء معلمة يمثل مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة. ومن المخطط الانسيابي السابق نجد المصفوفة الانتقالية وهي كالآتي:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

من المصفوفة الأخيرة يمكن إيجاد التوزيع المتزن(*) Equilibrium Distribution: $\pi_A = 3/7$ و $\pi_B = 4/7$، لذا نستنتج أن معدل الزمن المتواتر لسيارات هذه الشركة للمدينة A هو $\mu_A = 1/\pi_A = 7/3 = 2.33$ يوم . كذلك فإن معدل الزمن المتواتر لسيارات هذه الشركة للمدينة B هو $\mu_B = 1/\pi_B = 7/4 = 1.75$ يوم.

ب–كما أشرنا فإن النموذج الحركي الذي تعاملنا معه في هذه المسألة نموذج حتمي بيّن لنا أن النسبة بين نقطتي الاتزان لهذا النظام، واللتين

ت–تمثلان القيم التي سوف يؤول إليها النظام بعد زمن طويل، هي كنسبة 3/4. أما النموذج الرياضي الثاني والذي نُمذجت به هذه المسألة فهو نموذج تصادفي (غير حتمي) بيّن لنا أنه بعد زمن طويل فإن النسبة بين الاحتمالية المتزنة للعودة للحالتين هي أيضا كنسبة 3/4 أي على الرغم من الفارق بين منهجي المعالجة الرياضية للمسألة نفسها ، إلا أن النتيجة النهائية تبقى واحدة، وهذا من الأمور الجميلة في الرياضيات، فالأدوات قد تختلف إلا أن الثمار تكون متشابهه.

دراسة حالة: نمذجة حركة الانتخابات:

نظام انتخابي مؤلف من ثلاث كتل انتخابية A و B و C. فإذا كانت التقديرات تشير إلى أن 75% من الذين صوتوا في الانتخابات السابقة للكتلة A، سوف يصوتون في الانتخابات اللاحقة أيضا للكتلة A، في حين أن 5% سوف يصوتون للكتلة B و 20% سوف يصوتون للكتلة C. ومن الذين صوتوا في الانتخابات السابقة للكتلة B، فإن 20% منهم سوف يصوتون للكتلة A، في حين أن 60% سوف يصوتون أيضا للكتلة B و 20% سوف يصوتون للكتلة C. وأخيرا فمن الذين صوتوا في الانتخابات السابقة للكتلة C، فإن 40% منهم سوف يصوتون للكتلة A، في حين أن 20% سوف يصوتون للكتلة B و 40% سوف يصوتون أيضا للكتلة C. فإذا علمت أن أعداد الناخبين في الانتخابات السابقة كان 5.3 مليون للكتلة A، و 6.8 مليون للكتلة B، و 3.7 مليوناً للكتلة C.

أ– نمذج هذه المسألة بوصفها نظام حركي وجد نقاط الاتزان. ما عدد الناخبين المتوقع لكل فئة عندما يكون العدد الكلي للناخبين 20 مليون؟

ب– بفرض بقاء أعداد الناخبين ونسب الانتقالات بين الكتل الثلاث في الانتخابات اللاحقة على وضعها الحالي، جد أعداد الناخبين المتوقع

لكل من الكتل الثلاث في كل من الانتخابات الإحدى والعشرين القادمة. جد أيضا القيم العددية للمتجه الثابت.

ت– نمذج هذه المسألة بوصفها سلسلة ماركوفية، وجد التوزيع المتزن وفسره.

الحل:

أ- نفرض أن المتغير a_n يمثل عدد الناخبين الذين سوف يصوتون للكتلة A في الانتخابات ذات التسلسل n، وأن b_n يمثل عدد الناخبين الذين سوف يصوتون للكتلة B في

(*) التوزيع المتزن في النمذجة الماركوفية هو مفهوم مكافئ لمفهوم النقطة الثابتة في النظم الحركية.