التعريف (5-3):

إن **الفرق** بين a_{n+1} و a_n، يرمز له Δa_n، ويعرّف على النحو الآتي:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

التعريف (5-4):

يعرّف مُؤثّر التغيّر الأمامي Forward Shift Operator، F، على النحو الآتي:

$$a_{n+1} = Fa_n,\ a_{n+2} = F^2 a_n, \ldots,\ a_{n+k} = F^k a_n.$$

ملاحظة:

من التعريفين السابقين نستنتج أن:

$$\begin{aligned}\Delta a_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= Fa_n - a_n \\ &= (F-1)a_n.\end{aligned}$$

فتكون العلاقة بين مؤثر الفرق ومؤثر التغيّر الأمامي هي أن:

$$\Delta = F - 1.$$

المثال (5-4):

اكتب أول خمس حدود للمتتاليات المولّدة من كل من النماذج الآتية:

i- $\Delta a_n = \frac{1}{2} a_n \quad ; n \in N$

$a_0 = 1.$

ii- $\Delta b_n = -\frac{1}{3} b_n \quad ; n \in$

$a_0 = 3.$

الحل:

i- $A=\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \ldots\}.$

ii- $B=\{3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \ldots\}.$

المبرهنة (5-1):

إذا كانت a_{n+1} هي حدودية من الدرجة p، فإن الفرق p لـ a_n، $\Delta^p a_n$، يكون مقداراً ثابتاً لا يعتمد على n.

البرهان:

نفرض أن:

$$a_{n+1} = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + ... + c_p n^p;\ n \in N.$$

باستخدام الاستقراء الرياضي نلاحظ أنه عندما p=1 ، فإن:

$$a_{n+1} = c_0 + c_1 n;\ n \in N.$$

فيكون الفرق الأول بين a_{n+1} و a_n هو:

$$\begin{aligned}\Delta a_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= c_0 + c_1(n+1) - (c_0 + c_1 n) \\ &= c_1,\end{aligned}$$

وهو مقدار لا يعتمد على n. و عندما p=2 ، فإن:

$$a_{n+1} = c_0 + c_1 n + c_2 n^2;\ n \in N.$$

فيكون الفرق الثاني بين a_{n+1} و a_n هو:

$$\begin{aligned}\Delta^2 a_n &= (F-1)^2 a_n \\ &= (F^2 - 2F + 1)a_n \\ &= F^2 a_n - 2Fa_n + a_n \\ &= a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \\ &= c_0 + c_1(n+2) + c_2(n+2)^2 - 2[c_0 + c_1(n+1) + c_2(n+1)^2] + \\ &\quad c_0 + c_1 n + c_2 n^2.\end{aligned}$$

وبعد التبسيط والاختصار نجد أن:

$$\Delta^2 a_n = 2c_2 .$$

وهو مقدار لا يعتمد على n.

نفرض الآن أن العلاقة صحيحة عندما p=q. أي إن: $\Delta^q a_n$ ، هو مقدار ثابت لا يعتمد على n ، وليكن $\Delta^q a_n = C$. ونجد الآن أن:

$$\begin{aligned}\Delta^{q+1} a_n &= \Delta(\Delta^q a_n) \\ &= \Delta C \\ &= C.\end{aligned}$$

وهو مقدار لا يعتمد على n.

ملاحظة:

للمبرهنة الأخيرة أهمية كبيرة في بعض التطبيقات، إذ تستخدم لإجراء تحويل يقوم بتحويل الدوال المعتمدة على الزمن إلى أخرى غيرة معتمدة. فعلى سبيل المثال في موضوع تحليل المتسلسلات الزمنيةTime Series Analysis تُستخدم هذه المبرهنة لتحويل بعض المتسلسلات

الزمنية غير المُراوحة Non-Stationary إلى مُرساوحة وذلك بإجراء تحويل Transformation يعتمد أساسا على فكرة هذه المبرهنة.

5-5 المعادلات الفرقية Difference Equations:

في العديد من التطبيقات لا تكون العلاقة بين عناصر المتتالية معروفة (كما في المثال السابق). لذا يفضل كتابة كل عنصر من عناصر المتتالية كدالة رياضية بدلالة عدد من العناصر التي تسبقه، وهذا ما يُعرف بالمعادلة الفرقية Difference Equation. فلو كان لدَينا المتتالية $A=\{a_n\}$، وكان العنصر a_{n+1} هو دالة بدلالة العنصر الذي يسبقه a_n، فعندئذ تكون العلاقة:

$$a_{n+1} = g(a_n);\ n=0,1,2,\ldots.$$

وتسمى هكذا معادلة تسمية **معادلة فرقية من المَرتبة الأولى** First Order Difference Equation. ولو كانت الدالة g هي دالة خطية، فعندئذ تكون المعادلة الفرقية خطية لها الصيغة العامة الآتية:

$$a_{n+1} = c_0(n)+c_1(n)\, a_n;\ n=0,1,2,\ldots.$$

إذ إن $c_0(n)$ و $c_1(n)$ يُعرفان بمعاملي Coefficients المعادلة الفرقية. ويلاحظ أن هذين المعاملين هما دالتان بدلالة n، لذا فإن دراسة هكذا معادلة لا يكون بالأمر الهيّن. وللتيسير يفترض غالبا أن المعادلة ذات معاملات ثابتة With Constant Coefficients، لا تعتمد على n، وعندئذ تصبح المعادلة الأخيرة على النحو الآتي:

$$a_{n+1} = c_0+c_1a_n;\ n=0,1,2,\ldots.$$

وهي معادلة فرقية خطية من المرتبة الأولى وذات معاملات ثابتة، وللتيسير يطلق عليها غالبا معادلة فرقية من المرتبة الأولى.

التعريف (5-5):

المعادلة الفرقية الخطية ذات المعاملات الثابتة من المرتبة p يكون لها الصيغة العامة الآتية:

$$a_{n+1} = c_0+c_1a_n+c_2a_{n-1}+\ldots+c_{p-1}a_{n-p};\ n=0,1,2,\ldots.$$

إذ إن p هو عدد صحيح يزيد عن الصفر وإن $c_0,c_1,c_2,\ldots,c_{p-1}$ هي أعداد حقيقية.

التعريف (5-6):

يقال للعدد a بأنه **النقطة الثابتة** Fixed Point **(أو قيمة التوازن** Equilibrium Value**)** للنظام حركي $a_{n+1} = f(a_n)$ إذا كان a حلاً ثابت للنظام الحركي. أي إن a يحقق العلاقة $a = f(a)$.

ملاحظة:

يؤول إليها النظام الحركي في النهاية. أي إن النقطة الثابتة a، إذا كانت موجودة، فإنها تمثل القيمة التي تحقق $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

5-6 حَلّ المعادلات الفرقيّة

:Solution of Difference Equations

هناك عدد من الطرائق الرياضية التي تستخدم لحل المعادلات الفرقية، وهي:

1- **الطريقة المباشرة:** تستخدم هذه الطريقة عندما تكون مرتبة المعادلة الفرقية صغيرة، وبخاصة المرتبة الأولى، وسوف نوضح هذه الطريقة بالتفصيل في المبحث القادم.

2- **الطريقة الرياضية العامة:** تستخدم هذه الطريقة عندما تكون مرتبة المعادلة الفرقية تزيد عن المرتبة الأولى، ويكون حل المعادلة الفرقية بهذه الطريقة مشابه تماما لحل معادلة تفاضلية.

3- **طريقة تحويل- Z:** تستخدم هذه الطريقة على نطاق واسع في التطبيقات التقنية، كما تتوفر في MATLAB أدوات حاسوبية جاهزة للتعامل مع هذه الطريقة، ولا يتسع المجال للدخول بالتفاصيل.

5-7 المعادلة الفرقية الخطية من المرتبة الأولى

:First Order Linear Difference Equation

لنفرض أن لدَينا المعادلة الفرقية:

$$a_{n+1} = c_0 + c_1 a_n;\ n \in N\ . \qquad \textbf{(1-5)}$$

إنّ النظام المُعرّف بالمعادلة (5-1) هو نظام أحادي البُعد One-Dimensional، من المرتبة الأولى First-Order، مستقل ذاتياً Autonomous، لأنه يصف تطور المتغير الأحادي البعد a_{n+1} الذي تَعتمد قيمته عند الزمن القادم n+1 على طراز خطي مستقل عن الزمن (مستقل ذاتياً) من قيمته الحالية a_n.

إن حَلّ المعادلة الفرقية (5-1) عبارة عن مسار Trajectory (أَو مدار Orbit) للمتتالية $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$، والذي يحقق هذا القانون للحركة (المُمثّل بالمعادلة الفرقية (5-1)) عند أي نقطة زمنية. وهذا الحل يتعلق بإيجاد قيمة المتغير عند الزمن n، a_n، بدلالة قيمته الابتدائية a_0 فضلا عن قيمة المعلمتين c_0 و c_1.

يمكن بيسر حل المعادلة (5-1) بالطريقة المباشرة وعلى النحو الآتي. نقوم بالتعويض المتتالي عن قيم الدليل n: فعندما n=1، فإن:

$$a_1 = c_0 + c_1 a_0$$

وعندما n=2، فإن:

$$\begin{aligned} a_2 &= c_0 + c_1 a_1 \\ &= c_0 + c_1 (c_0 + c_1 a_0) \\ &= c_0 (1 + c_1) + c_1^2 a_0. \end{aligned}$$