القاسم المشترك الاعظم Greatest Common Division:

تعريف:

القاسم المشترك الاعظم لعددين (أو أكثر) هو أكبر العوامل المشتركة بينهما (أو بينهم).

رياضياً:

ليكن a, b عددين صحيحين ليس كلاهما صفر، نقول ان d هو القاسم المشترك الاعظم للعددين a, b ونرمز لذلك بالرمز d=gcd (a, b) أو d= (a, b)، إذا تحقق ما يلي:

i. d>0.

ii. $d \setminus a$ و $d \setminus b$.

iii. اذا كان $c \setminus a$ و $c \setminus b$، c>0 فان $c \leq d$.

ملاحظة: يمكن تعميم التعريف اعلاه، اذا كانت $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ اعداداً صحيحة ليست كلها اصفاراً، فيقال عن $d \in N^*$، $d = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ قاسم مشترك اعظم للاعداد $a_i \in Z^*$، $1 \leq i \leq n$، اذا كان:

i. $d \setminus a_i$ لكل i=1, 2, 3, ..., n.

ii. اذا كان $c \in N^*$ وكان $c \setminus a_i$ لكل i، فان c\d.

أمثلـة:

1- (12, 18) = (-12, 18) = (12, -18) = (-12, -18) = 6
2- (21, 14, 91) =7
3- (7, 16) =1
4- (12,15,30, 60) =3
5- (-8, -16, 40) =4

a	b	$d=\gcd(a,b)$
4	5	1
9	15	3
8	32	8
15	35	5
20	30	10

مبرهنـة (10):

اذا كان واحد على الاقل من العددين $a, b \in Z$ لايساوي صفراً، فيوجد لها قاسم مشترك اعظم وحيد هو d، كما يوجد عددين $m, n \in Z$ بحيث **d=am+ bn**.

مبرهنـة (11):

اذا كان كل من a, b اعداد صحيحة غير صفرية، وكان **a = bm+r**، $0 \leq r < m$، فأن (a, b) = (b, r).

البرهان:

نفرض أن d=(a, b)، اذا $d \setminus a$, $d \setminus b$ وعليه فأن $d \setminus (a-mb)$ فهذا يعني ان $d \setminus r$، وبالتالي فان d قاسم مشترك لكل r, b.

والان نفرض أن $c \in N^*$، $c \setminus b$, $c \setminus r$, اذا $c \setminus (bm+r)$ ، وعليه فان $c \setminus a$، وبالتالي فان c قاسم مشترك للعددين a, b. إذا $c \setminus d$، وعليه فأن d= (b, r).

نتيجة (1): اذا كان $a, b, c \in Z$، و$c>0$، فان (ac ,bc) = c(a, b).

البرهان:

ليكن d=(a, b)، اذا يوجد $m, n \in Z$ بحيث ان d=am+ bn وحسب المبرهنة (10).

ليكن $d \setminus a$ و $d \setminus b$، اذاً $dc \setminus ac$ و $dc \setminus bc$ ، وعليه فان dc قاسم مشترك للعددين ac و bc.

والان لنفرض ان $e \setminus ac$ و $e \setminus bc$، اذا $e \setminus acx + bcy$ لكل $x, y \in Z$،

وعليه فان $e \setminus acm + bcn$ وهذا يعني $e \setminus (am + bn)c$،

وعليه فان $e \setminus dc$. اذا (ac , bc) = c(a, b) .

ملاحظة:

إذا كان d= (a, b) = am+ bn، فان m, n ليسا وحيدين، سوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال: 1- ليكن a= 18، b=27 اذاً

9= (18, 27) = (-1) (18) +(1) (27) = (2) (18) +(-1) (27).
