بند (5): الدفعات المتساوية في حالة الفائدة البسيطة
Equal – Payment

أولاً: التعريف بالدفعات المتساوية:

هـــي مبـــالغ متســـاوية تـــدفع بانتظـــام عـــلى فـــترات زمنيـــة متســـاوية (Equal Periodic) كأن يقوم موظف معين بتسديد القرض الـذي اقترضـه مـن المصرف على شكل دفعات متساوية (كل بداية شهرين) أو كل بداية ثلاثة أشـهر أو كل نهاية شهرين وهكذا.

مبلغ الدفعة (Periodic Payment): يطلق على المبلغ المـدفوع بصـورة متكـررة بمبلغ الدفعة.

فترة الدفعة (Payment-Interval): وهي الفترة الزمنية الفاصلة وتاريخ إيـداع دفعة وتاريخ إيداع الدفعة التي تليها.

مدة الدفعات (Term of the Payment): وهي المدة الفاصلة بين بدايـة الفـترة الزمنية الأولى ونهاية الفترة الزمنية الأخيرة.

أنواع الدفعات المتساوية:

الدفعات العادية (Ordinary Payment): وهي الدفعات التي تـدفع في نهايـة الفترة الزمنية.

الدفعات الفورية (غير العادية) (Payment Due): وهـي الـدفعات التـي يـتم دفعها في بداية الفترة الزمنية.

ثانياً: قانون جملة الدفعات المتساوية في بداية المدة:

إذا رمزنا لجملة الدفعات المتساوية بالرمز (جم) ومبلغ الدفعة الواحد بالرمز (م) ولعدد الدفعات بالرمز (ن) ولسعر الفائدة بالرمز (ع) ولمدة استثمار الدفعة الأولى بالرمز (أ) ولمدة استثمار الدفعة الأخيرة بالرمز (ل) فإن قانون جملة الدفعات المتساوية في بداية الفترة الزمنية يكون:

$$\text{جم} = \text{م} \times \text{ن} + \frac{\text{م} \times \text{ع}}{1200}\left(\frac{\text{ن}}{2}(\text{أ}+\text{ل})\right)$$

$$\text{عدد الدفعات (ن)} = \frac{\text{المدة الكلية}}{\text{مدة الدفعة الواحدة}}$$

فعلى سبيل المثال إذا كانت مدة القرض (1.5) سنة يعني (18) شهراً وتدفع في بداية كل شهرين فإن:

$$\text{عدد الدفعات} = \frac{18}{2} = 9$$

وأن أ = 18 ل = 2

أو كان الدفع في بداية كل ثلاثة أشهر فإن:

$$\text{عدد الدفعات} = \frac{18}{3} = 6$$

وأن أ = 18 ل = 3 وهكذا

الاشتقاق الرياضي للقانون:

نفرض أن مبلغاً (م) يمثل مبلغ الدفعة الواحدة التي تدفع في بداية كل شهرين لسداد قرض ما ولمدة سنة كاملة (12) شهراً بمعدل فائدة (4٪) والمطلوب إيجاد جملة دفعات هذا المبلغ؟

الحل:

∴ المدة الإجمالية سنة كاملة = 12 شهراً.

∴ مدة الدفعة الواحد = 2 شهراً.

$$\therefore \text{عدد الدفعات} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\therefore ف_1 = \frac{م \times 12 \times ع}{1200} \text{(الفائدة الأولى)}$$

$$\therefore ف_2 = \frac{م \times 10 \times ع}{1200} \text{(الفائدة الثانية)}$$

$$\therefore ف_3 = \frac{م \times 8 \times ع}{1200} \text{(الفائدة الثالثة)}$$

$$\therefore ف_4 = \frac{م \times 6 \times ع}{1200} \text{(الفائدة الرابعة)}$$

$$\therefore ف_5 = \frac{م \times 4 \times ع}{1200} \text{(الفائدة الخامسة)}$$

$$\therefore ف_6 = \frac{م \times 2 \times ع}{1200} \text{ (الفائدة السادسة)}$$

$$ف = ف_1 + ف_2 + ف_3 + ف_4 + ف_5 + ف_6$$

$$\text{مجموع الفوائد} = \frac{م \times 12 \times ع}{1200} + \frac{م \times 10 \times ع}{1200} + \frac{م \times 8 \times ع}{1200} \ldots \frac{م \times 2 \times ع}{1200}$$

$$\frac{م \times ع}{1200} [2+4+6+8+10+12]$$

الأعداد بين قوسين تمثل متوالية عددية حدها (12) والأخيرة (2) وعدد حدودها معلوم وهو (6) يمكن الاستعاضة عنها بـ:

$$\frac{م \times ع}{1200} \left((أ+ل) \frac{ن}{2} \right)$$

جملة المبالغ = مجموع المبالغ + مجموع الفوائد

$$\text{جملة المبالغ} = م \times ن + \frac{م \times ع}{1200} \left((أ+ل) \frac{ن}{2} \right)$$

مثال (1): جد جملة دفعات مبلغ (150) ديناراً أودع في مصرف ما على شكل دفعات متساوية في بداية كل ثلاثة أشهر ولمدة سنة ونصف بمعدل فائدة بسيطة 4٪ سنوياً؟

الحل:

$$\therefore \text{جم} = \text{م} \times \text{ن} + \frac{\text{م} \times \text{ع}}{1200}(\text{أ}+\text{ل})\left(\frac{\text{ن}}{2}\right)$$

بداية كل ثلاثة أشهر معناه: أ = 18 شهراً (1.5 سنة)

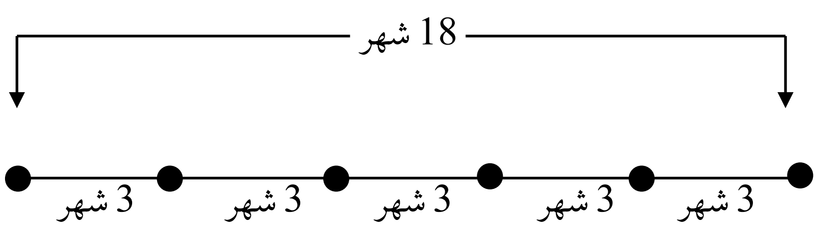
ل = 3 شهراً

عدد الدفعات (ن) = $\frac{18}{3}$ = 6 دفعات

$$\therefore \text{جم} = 150 \times 6 + \frac{4 \times 150}{1200}(3+18)\left(\frac{6}{2}\right)$$

$$\therefore \text{جم} = 900 + \frac{600}{1200}(21)\left(\frac{6}{2}\right)$$

$\therefore$ جم = $900 + \frac{600}{1200} \times \frac{6}{2} \times (21)$ = ديناراً جملة الدفعات المتساوية للمبلغ المذكور



ن = 6 دفعة

ثالثاً: قانون جملة الدفعات المتساوية في نهاية المدة

إن الفرق الأساس بين جملة الدفعات المتساوية في بداية المدة الزمنية وجملة الدفعات المتساوية في نهاية المدة هو أن مدة استثمار الدفعة الأولى (أ) في القانون تأخذ كامل المدة في حالة الدفعات المتساوية في بداية المدة و (ل) تأخذ مدى دفعة واحدة مثل شهرين أو ثلاثة أو ... أما قانون جملة الدفعات المتساوية في نهاية المدة الزمنية فإن (أ) تكون مساوية [للمدة الإجمالية مطروحاً منها مدة الدفعة الواحدة] أما (ل) فتكون صفراً على الدوام..

الاشتقاق الرياضي لقانون جملة الدفعات المتساوية في نهاية المدة الزمنية:

بالعودة إلى قانون جملة الدفعات المتساوية:

$$\text{جم} = \text{م} \times \text{ن} + \frac{\text{م} \times \text{ع}}{1200}\left((\text{أ}+\text{ل})\ \frac{\text{ن}}{2}\right)$$

ولنفرض أن مبلغاً مقداره (م) تم إيداعه على شكل دفعات متساوية في نهاية كل شهرين في مصرف ما من قبل المودع أحمد وبمعدل فائدة ع٪ ولمدة سنة كاملة والمطلوب إيجاد جملة دفعات هذا المبلغ في نهاية السنة؟؟

الحل:

$$\therefore \text{جم} = \text{م} \times \text{ن} + \frac{\text{م} \times \text{ع}}{1200}\left((\text{أ}+\text{ل})\ \frac{\text{ن}}{2}\right)$$

1 سنة = 12 شهراً

عدد الدفعات = $\frac{12}{2} = 6$

أ = $(12-2) = 10$

ل = صفر

ف$_1$ = $\frac{م \times 10 \times 12}{1200}$ (وهي أ)

ف$_2$ = $\frac{م \times 8 \times ع}{1200}$

ف$_3$ = $\frac{م \times 6 \times ع}{1200}$

ف$_4$ = $\frac{م \times 4 \times ع}{1200}$

ف$_5$ = $\frac{م \times 2 \times ع}{1200}$

ف$_6$ = $\frac{م \times صفر \times ع}{1200}$ = صفر (وهي ل)

$\therefore$ ف = ف$_1$ + ف$_2$ + ف$_3$ + ف$_4$ + ف$_5$ + ف$_6$

$\therefore$ف= $\frac{م \times 10 \times ع}{1200} + \frac{م \times 8 \times ع}{1200} + \ldots + $ صفر

$= \frac{م \times ع}{1200} [10 + 8 + 6 + 4 + 2 + 0]$

المقادير داخل القوس متوالية عددية حدها الأول (10) وحدها الأخير (صفر) وعدد حدودها (6) يمكن كتابتها

$$\frac{\text{ن}}{2}\,[\text{أ} + \text{ل}]$$

$$\text{مجموع الفوائد} = \frac{\text{م} \times \text{ع}}{1200}\left((\text{أ}+\text{ل})\ \frac{\text{ن}}{2}\right)$$

جملة الدفعات = مجموع المبالغ (م × ن) + مجموع الفوائد

$$\text{جملة الدفعات} = \text{م} \times \text{ن} + \frac{\text{م} \times \text{ع}}{1200}\left((\text{أ}+\text{ل})\ \frac{\text{ن}}{2}\right)$$

مثال (2): جد جملة دفعات مبلغ (100) دينار أودع في مصرف الرشيد على شكل دفعات متساوية في نهاية كل ثلاثة أشهر بمعدل فائدة 4٪ سنوياً ولمدة سنتان؟

الحل:

$$\therefore \text{جم} = \text{م} \times \text{ن} + \frac{\text{م} \times \text{ع}}{1200}\left((\text{أ}+\text{ل})\ \frac{\text{ن}}{2}\right)$$

$$\text{ن} = \frac{24 \text{ شهراً}}{3} = 6 \text{ دفعات}$$

$$\text{أ} = (24 - 3) = 21 \text{ شهراً}$$

ل = صفر

$$\therefore \text{جم} = 6 \times 100 + \frac{4 \times 100}{1200}\left((21+0)\ \frac{6}{2}\right)$$

$$\text{جم} = 600 + \frac{400}{1200} \times \frac{6}{2} \times 21$$

= 621 ديناراً جملة الدفعات المتساوية

مثال (3): يودع إحسان مبلغ (100) ديناراً في بداية كل ثلاثة أشهر في مصرفه بمعدل 4٪ سنوياً ولمدة سنة وثلاثة أشهر ثم يقوم بسحب 50 ديناراً في نهاية كل ثلاثة أشهر بالمعدل نفسه، فما هو رصيد إحسان؟

الحل:

أ. الإيداع:

$$\therefore \text{جم} = \text{م} \times \text{ن} + \frac{\text{م} \times \text{ع}}{1200}\left((\text{أ}+\text{ل})\ \frac{\text{ن}}{2}\right)$$

$$\text{ن} = \frac{\text{15 شهراً}}{3} = 5 \text{ دفعات} \qquad \text{أ} = 15 \qquad \text{ل} = 3$$

$$\therefore \text{جم}_1 = 5 \times 100 + \frac{4 \times 100}{1200}\left(\frac{5}{2}\ (15+3)\right)$$

$$\text{جم} = 500 + \frac{400}{1200} \times \frac{5}{2} \times (18)$$

= 515 ديناراً

ب. السحب:

أ = 25

ل = صفراً

$$\therefore \text{جم}_2 = 100 \times 5 + \frac{4 \times 100}{1200}\left(\frac{5}{2}\ (15+0)\right)$$

جم = 510 ديناراً

$\therefore$ الرصيد = جم$_1$ – جم$_2$ = 515 – 510 = 5 ديناراً

ملاحظة: لو كان إحسان يودع في بداية كل ثلاثة أشهر ثم يودع أيضاً في بداية كل شهرين نقوم بجمع الجملة الأولى للدفعات المتساوية مع جملة الدفعات المتساوية الثانية بدلاً من طرحها.