من المصفوفة الأخيرة يمكن إيجاد التوزيع المتزن(*) Equilibrium Distribution: $\pi_A = 3/7$ و $\pi_B = 4/7$، لذا نستنتج أن معدل الزمن المتواتر لسيارات هذه الشركة للمدينة A هو $\mu_A = 1/\pi_A = 7/3 = 2.33$ يوم . كذلك فإن معدل الزمن المتواتر لسيارات هذه الشركة للمدينة B هو $\mu_B = 1/\pi_B = 7/4 = 1.75$ يوم.

ب–كما أشرنا فإن النموذج الحركي الذي تعاملنا معه في هذه المسألة نموذج حتمي بيّن لنا أن النسبة بين نقطتي الاتزان لهذا النظام، واللتين

ت–تمثلان القيم التي سوف يؤول إليها النظام بعد زمن طويل، هي كنسبة 3/4. أما النموذج الرياضي الثاني والذي نُمذجت به هذه المسألة فهو نموذج تصادفي (غير حتمي) بيّن لنا أنه بعد زمن طويل فإن النسبة بين الاحتمالية المتزنة للعودة للحالتين هي أيضا كنسبة 3/4 أي على الرغم من الفارق بين منهجي المعالجة الرياضية للمسألة نفسها ، إلا أن النتيجة النهائية تبقى واحدة، وهذا من الأمور الجميلة في الرياضيات، فالأدوات قد تختلف إلا أن الثمار تكون متشابهه.

## دراسة حالة: نمذجة حركة الانتخابات:

نظام انتخابي مؤلف من ثلاث كتل انتخابية A و B و C. فإذا كانت التقديرات تشير إلى أن 75% من الذين صوتوا في الانتخابات السابقة للكتلة A، سوف يصوتون في الانتخابات اللاحقة أيضا للكتلة A، في حين أن 5% سوف يصوتون للكتلة B و 20% سوف يصوتون للكتلة C. ومن الذين صوتوا في الانتخابات السابقة للكتلة B، فإن 20% منهم سوف يصوتون للكتلة A، في حين أن 60% سوف يصوتون أيضا للكتلة B و 20% سوف يصوتون للكتلة C. وأخيرا فمن الذين صوتوا في الانتخابات السابقة للكتلة C، فإن 40% منهم سوف يصوتون للكتلة A، في حين أن 20% سوف يصوتون للكتلة B و 40% سوف يصوتون أيضا للكتلة C. فإذا علمت أن أعداد الناخبين في الانتخابات السابقة كان 5.3 مليون للكتلة A، و 6.8 مليون للكتلة B، و 3.7 مليوناً للكتلة C.

أ– نمذج هذه المسألة بوصفها نظام حركي وجد نقاط الاتزان. ما عدد الناخبين المتوقع لكل فئة عندما يكون العدد الكلي للناخبين 20 مليون؟

ب– بفرض بقاء أعداد الناخبين ونسب الانتقالات بين الكتل الثلاث في الانتخابات اللاحقة على وضعها الحالي، جد أعداد الناخبين المتوقع

لكل من الكتل الثلاث في كل من الانتخابات الإحدى والعشرين القادمة. جد أيضا القيم العددية للمتجه الثابت.

ت– نمذج هذه المسألة بوصفها سلسلة ماركوفية، وجد التوزيع المتزن وفسره.

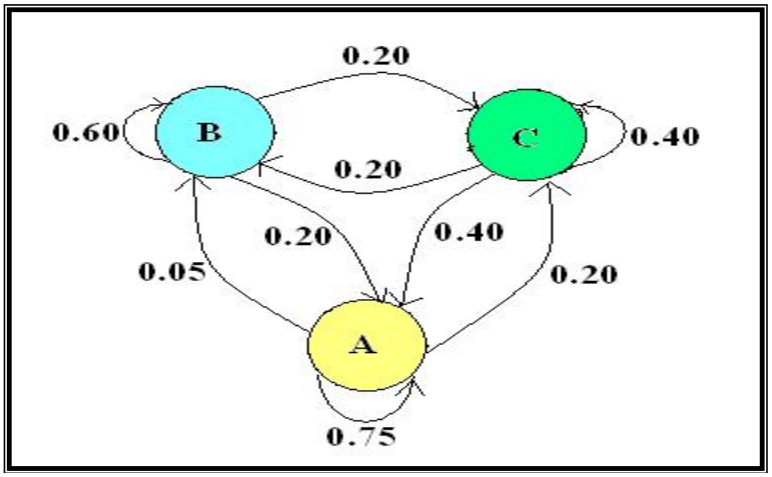
**الحل:**

أ- نفرض أن المتغير $a_n$ يمثل عدد الناخبين الذين سوف يصوتون للكتلة A في الانتخابات ذات التسلسل n، وأن $b_n$ يمثل عدد الناخبين الذين سوف يصوتون للكتلة B في

---

**(*) التوزيع المتزن في النمذجة الماركوفية هو مفهوم مكافئ لمفهوم النقطة الثابتة في النظم الحركية.**

الانتخابات ذات التسلسل n ، و أن $c_n$ يمثل عدد الناخبين الذين سوف يصوتون للكتلة C في الانتخابات ذات التسلسل n. والشكل الآتي يبن المخطط الانتقالي لحركة انتقالات الناخبين بين الكتل الانتخابية الثلاث.




**الشكل ( 2): المخطط الانتقالي لحركة انتقالات الناخبين بين الكتل الانتخابية الثلاثة.**

ومن المخطط الانتقالي نستنتج أن النموذج الحركي لعدد النخبين في هذا النظام الانتخابي على النحو الآتي:

$$a_{n+1} = 0.75a_n + 0.20b_n + 0.40c_n;\ n = 0,1,2,3,....$$

$$b_{n+1} = 0.05a_n + 0.60b_n + 0.20c_n;\ n = 0,1,2,3,....$$

$$c_{n+1} = 0.20a_n + 0.20b_n + 0.40c_n;\ n = 0,1,2,3,....$$

$$a_0 = 5.3,\ b_0 = 6.8,\ c_0 = 3.7.$$

لاحظ أن مجموع معاملات كل من $a_{n-1}$ و $b_{n-1}$ و $c_{n-1}$ في المعادلات الثلاث السابقة يساوي 1.

نفرض الآن أن النقاط الثابتة هي $a^* = \lim_{n\to\infty} a_n$ و $b^* = \lim_{n\to\infty} b_n$ و $c^* = \lim_{n\to\infty} c_n$. وبأخذ غايات المعادلات الثلاث الأخيرة، نحصل على المعادلات الثلاث الآتية:

$$0.25a^* - 0.2b^* - 0.4c^* = 0,$$
$$0.05a^* - 0.4b^* + 0.2c^* = 0,$$
$$0.2a^* + 0.2b^* - 0.6c^* = 0.$$

وبحل المعادلات الأخيرة آنيا نحصل على ما يأتي:

$$b^*/c^* = 0.78;\ c^*/a^* = 0.45;\ b^*/a^* = 0.35.$$

أي إنه على المدى البعيد فان نسبة المصوتين للكتلة B بالنسبة للكتلة C ستكون 78%، ونسبة المصوتين للكتلة C بالنسبة للكتلة A ستكون 45%، ونسبة المصوتين للكتلة B بالنسبة للكتلة A ستكون 35%. وطالما أن $b^*/c^* < 1;\ c^*/a^* < 1;\ b^*/a^* < 1$، فكما هو واضح فإن الكتلة A ستكون هي الأكبر على المدى البعيد، تليها C ثم B.

طالما أن العدد الكلي من الناخبين هو 20 مليون:

$\because a^* + b^* + c^* = 20,$

$\therefore a^* + 0.78(0.45)a^* + 0.45a^* = 20,$

$\therefore a^* = 11.1049$ مليون ناخب.

$b^* = 0.78(0.45)a^* = 3.8978$ مليون ناخب.

$c^* = 0.45a^* = 4.9972$ مليون ناخب.

ب- البرنامج الآتي، واسمه ElectionsDynamics، يقوم بإجراء اللازم.

```
%Elections Dynamics
clear; clc
a(1)=5.3;b(1)=6.8;c(1)=3.7;x(1)=0;nmax=20;
for n=1:nmax
x(n+1)=n;
a(n+1)=0.75*a(n)+0.2*b(n)+0.4*c(n);
b(n+1)=0.05*a(n)+0.6*b(n)+0.2*c(n);
c(n+1)=0.2*a(n)+0.2*b(n)+0.4*c(n);
end
disp([' n   a(n)  b(n)  c(n)'])
disp([x',a',b',c'])
FixedVector=[a(nmax+1) b(nmax+1) c(nmax+1)]'
plot(x,a, 'ks',x,b,'ko',x,c,'kd')
title('Elections Dynamics')
xlabel('Election n')
ylabel('Number of Electors')
grid on
```

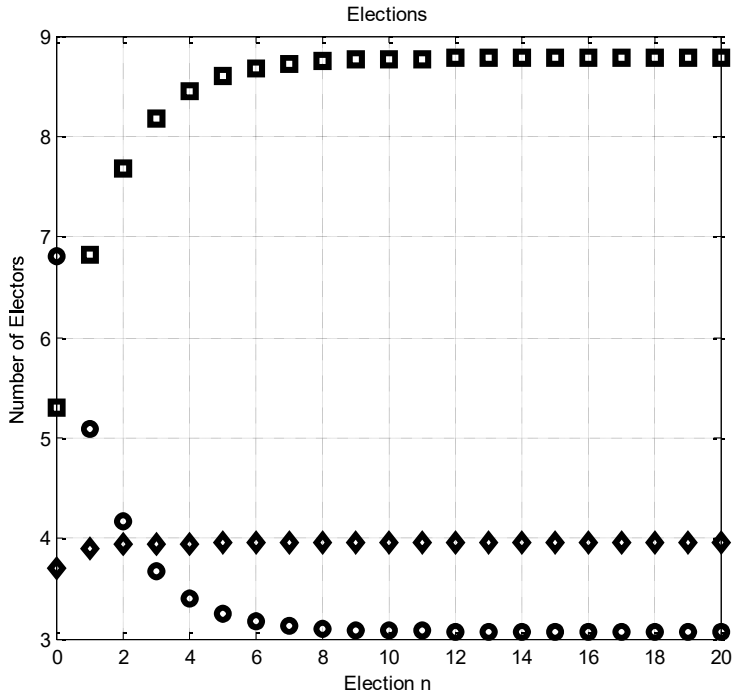
ونتيجة الحاسوب هي على النحو الآتي:

```
   n     a(n)     b(n)    c(n)
   0   5.3000   6.8000  3.7000
 1.0000  6.8150  5.0850  3.9000
 2.0000  7.6883  4.1717  3.9400
 3.0000  8.1765  3.6755  3.9480
 4.0000  8.4467  3.4037  3.9496
 5.0000  8.5956  3.2545  3.9499
 6.0000  8.6776  3.1725  3.9500
 7.0000  8.7227  3.1273  3.9500
 8.0000  8.7475  3.1025  3.9500
 9.0000  8.7611  3.0889  3.9500
 10.0000  8.7686  3.0814  3.9500
 11.0000  8.7727  3.0773  3.9500
 12.0000  8.7750  3.0750  3.9500
```

**13.0000 8.7763 3.0737 3.9500**
**14.0000 8.7769 3.0731 3.9500**
**15.0000 8.7773 3.0727 3.9500**
**16.0000 8.7775 3.0725 3.9500**
**17.0000 8.7776 3.0724 3.9500**
**18.0000 8.7777 3.0723 3.9500**
**19.0000 8.7777 3.0723 3.9500**
**20.0000 8.7778 3.0722 3.9500**

**FixedVector =**

**8.7778**
**3.0722**
**3.9500**




أي إنه، لو فرضنا بقاء أعداد الناخبين ونسب الانتقالات بين الكتل الثلاث في الانتخابات اللاحقة على وضعها الحالي، فإن أعداد الناخبين خلال الانتخابات الإحدى والعشرين القادمة سيكون على النحو الآتي: أعداد الناخبين للكتلة A سوف يقترب شيئا فشيئا من 8.7778 مليون ناخب، أعداد الناخبين للكتلة B سوف يقترب شيئا فشيئا من 3.0722 مليون ناخب، وأعداد الناخبين للكتلة C سوف يستقر عند 3.95 مليون ناخب. لاحظ أن $b_{21}/c_{21}=0.7778$ و $c_{21}/a_{21}=0.45$ و $b_{21}/a_{21}=0.35$، وهذه النسب مطابقة للنسب التي جهزنا بها المتجه الثابت. يلاحظ أخيرا أن الكتلة A،

تحت الفروض المعطاة، سوف تكون بعد إحدى وعشرين انتخاباً مهيمنة على قرابة 55.5% من أصوات الناخبين، تليها الكتلة C التي سوف يكون لها 25% من أصوات الناخبين، ثم الكتلة C التي سيكون لها 19.5% من أصوات الناخبين.

يمكن أيضا إيجاد المتجه الثابت بطريقة ثانية: نكوّن أولا معادلة رابعة لمعادلات نقاط الاتزان الثلاث تتضمن الشروط الابتدائية:

$$a+b\ +c\ =5.3+6.8+3.7=15.8.$$

ثم نحوّل المعادلات الخطية الأربع إلى مصفوفات بالصيغة العامة:

$$\begin{pmatrix} 0.25 & -0.2 & -0.4 \\ 0.05 & -0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & -0.6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15.8 \end{pmatrix}.$$

ولنفرض أن المعادلة الأخيرة هي $AX = B$ ، فيكون الحل العددي هو $X = A^{-1}B$ ، إذ إن $X = (a\ b\ c)'$ . لاحظ أن A هي مصفوفة غير مربعة، لذا فيمكننا الاستفادة من الدالة الحاسوبية pinv والتي تقوم بحساب ما يعرف بالمعكوس المزيّف Pseudo Inverse.

```
A=[0.25 -0.2 -0.4;0.05 -0.4 0.2; 0.2 0.2 -0.6;1 1 1];
B=[0 0 0 15.8]';
X=pinv(A)*B
```

ونتيجة الحاسوب هي:

```
X =
  8.7778
  3.0722
  3.9500
```

وهذه القيم تمثل القيم العددية للمتجه الثابت.

ت- نفرض أن المتغير $X_n$ يمثل الكتلة الانتخابية الفائزة في الانتخابات $n$ . وكما هو واضح فان $\{X_n\}$ هي سلسلة ماركوفية بفضاء حالة S={A,B,C} وبفضاء معلمة يمثل مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة. ومن المخطط الانسيابي السابق نجد المصفوفة الانتقالية وهي كالآتي:

$$\underset{\sim}{P} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.05 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.40 & 0.20 & 0.40 \end{pmatrix}.$$

ويمكن بيسر إيجاد التوزيع المتزن : $\pi_A = 0.5555$ و $\pi_B = 0.1945$ و $\pi_C = 0.0.2500$ ، لذا نستنتج أن معدل الزمن المتواتر للكتلة A هو $\mu_A = 1/\pi_A = 1.8$ ، ومعدل الزمن المتواتر للكتلة B هو $\mu_B = 1/\pi_B = 5.15$ ، ومعدل الزمن المتواتر للكتلة C هو $\mu_C = 1/\pi_C = 4$ . أي من الناحية النظرية وتحت الفروض المعطاة فإننا نتوقع- معدلاً- أن الكتلة A ستكون فائزة كل 1.8 من الانتخابات (أي قرابة كل انتخابين)، في حين أن الكتلة B ستكون فائزة كل قرابة 5 انتخابات، وأن الكتلة C ستكون فائزة كل 4 انتخابات.