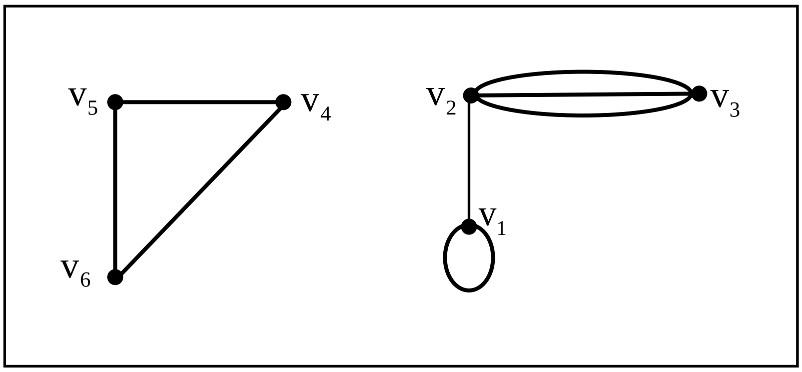
الاتصال: connected

البيان المتصل (connected graph): يقال لبيان G أنه بيان متصل إذا وفقط إذا كان لكل رأسين مختلفين u و v في G يوجد درب واحد على الأقل يصل u مع v في G ، وفيما عدا ذلك يكون البيان G **غير متصل (disconnected graph)**.

كما يقال لرأسين u و v في بيان G أنهما متصلان إذا وجد درب من أحدهما إلى الآخر.

المركبة (compound): يقال لأي بيان جزئي متصل غير محتو فعليا في أي بيان جزئي متصل أخر من البيان G أنه مركبة لـ G . من الواضح أن البيان المكون من مركبة واحدة هو بيان متصل والعكس صحيح.

مثال: البيان G في الشكل (6−1) يكون بيان غير متصل وذلك لعدم وجود درب بين الرأس v_1 والرأس v_4 مثلا ، كما نلاحظ أن البيان G يتكون من مركبتين فقط .



الشكل (6−1) البيان G

الآن سوف نأخذ بعض المبرهنات التي لها علاقة بالاتصال والمركبات:

المبرهنة 1.6: ليكن G بيانا بسيطا محتويا على رأسين فقط u و v بدرجة فردية ، عندئذ يكون الرأسان u و v متصلين .

البرهان: لما كان كل بيان (متصل أو غير متصل) يحتوي على عدد زوجي من الرؤوس ذات الدرجة الفردية (راجع نتيجة 2.2) ، فأن الرأسين u و v يقعان في مركبة واحدة لـ G ، وبذلك فأن هنالك دربا من u إلى v، إذا الرأسان u و v متصلان. **انتهى البرهان**

المبرهنة 2.6: ليكن G بيانا بسيطا عدد رؤوسه p وعدد حافاته q وعدد مركباته k، عندئذ يكون : $q \leq \frac{1}{2}(p-k)(p-k+1)$.

المبرهنة 3.6 : ليكن G بيان بسيطا بـ p من الرؤوس وبأكثر من $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ من الحافات ، عندئذ يكون البيان متصلا.

البرهان: إذا كان G مكونا من k من المركبات ، فأن عدد حافاته لا يزيد على $\frac{1}{2}(p-k)(p-k+1)$ بموجب مبرهنة 2.6 ، ولما كان

$$\frac{1}{2}(p-1)(p-2) \geq \frac{1}{2}(p-k)(p-k+1),\ k \geq 2\ ,$$

وأن عدد حافاته لا تزيد على $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ بالفرض، فأن كون $k \geq 2$ يناقض مبرهنة 2.6 ، لذلك فأن $k=1$ ، وأن G بيانا متصلا. **انتهى البرهان**

المبرهنة 4.6: ليكن G بيانا بسيطا متصلا عدد رؤوسه p وعدد حافاته q، فأن $q \geq p-1$.

النتيجة 5.6: ليكن G بيانا بسيطا عدد رؤوسه p وعدد حافاته q وعدد مركباته k، فأن $q \geq p-k$.

المبرهنة 6.6: ليكن G بيانا بسيطا عدد رؤوسه $2p$ وخاليا من الدارات المثلثية، فأن $q \leq p^2$.

البرهان : نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على p.

عندما $p=1$ ، يكون عدد الحافات أما صفرا أو واحدا، لأن البيان البسيط المكون من رأسين له حافة واحدة على الأكثر، وبذلك فأن المبرهنة صحيحة عندما $p=1$.

نفرض المبرهنة صحيحة لكل بيان بسيط خال من المثلثات وعدد رؤوسه $2(p-1)$،

الآن لنأخذ بيان بسيط خال من المثلثات وعدد رؤوسه $2p$.

لتكن $[u,v]$ حافة في G، وليكن H البيان الناتج من G بإزالة الرأسين u و v مع كل الحافات الواقعة عليهما. واضح أن البيان H يحتوي على $2(p-1)$ رأسا وهو خالي من المثلثات، لذلك فأن عدد حافاته q لا يزيد على $(p-1)^2$.

إذا كان w أي رأس غير u و v في G، فأنه لا يمكن أن يكون متجاورا مع u و v معا. لأن G خال من المثلثات، لذلك إذا كانت درجة u هي k فأن درجة v لا تزيد على $(2p-k)$، وعليه فأن q عدد حافات G يحقق المتباينة :

$q \leq (p-1)^2 + k + (2p-k) - 1 = p^2.$ **انتهى البرهان**

تمارين :

1. برهن على أن كل بيان متصل برتبة p يجب أن يحتوي على ما لا يقل عن $(p-1)$ من الحافات .
2. برهن المبرهنة 2.6.
3. برهن المبرهنة 4.6.
4. برهن المبرهنة 5.6.
5. ليكن G بيانا بسيطا ، برهن على أنه إذا كان G غير متصلا ، فأن متممه يكون متصلا.