يؤول إليها النظام الحركي في النهاية. أي إن النقطة الثابتة a، إذا كانت موجودة، فإنها تمثل القيمة التي تحقق $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

5-6 حَلّ المعادلات الفرقيّة

:Solution of Difference Equations

هناك عدد من الطرائق الرياضية التي تستخدم لحل المعادلات الفرقية، وهي:

1- **الطريقة المباشرة:** تستخدم هذه الطريقة عندما تكون مرتبة المعادلة الفرقية صغيرة، وبخاصة المرتبة الأولى، وسوف نوضح هذه الطريقة بالتفصيل في المبحث القادم.

2- **الطريقة الرياضية العامة:** تستخدم هذه الطريقة عندما تكون مرتبة المعادلة الفرقية تزيد عن المرتبة الأولى، ويكون حل المعادلة الفرقية بهذه الطريقة مشابه تماما لحل معادلة تفاضلية.

3- **طريقة تحويل- Z:** تستخدم هذه الطريقة على نطاق واسع في التطبيقات التقنية، كما تتوفر في MATLAB أدوات حاسوبية جاهزة للتعامل مع هذه الطريقة، ولا يتسع المجال للدخول بالتفاصيل.

5-7 المعادلة الفرقية الخطية من المرتبة الأولى

:First Order Linear Difference Equation

لنفرض أن لدَينا المعادلة الفرقية:

$$a_{n+1} = c_0 + c_1 a_n;\ n \in N\ . \qquad \textbf{(1-5)}$$

إنّ النظام المُعرّف بالمعادلة (5-1) هو نظام أحادي البُعد One-Dimensional، من المرتبة الأولى First-Order، مستقل ذاتياً Autonomous، لأنه يصف تطور المتغير الأحادي البعد a_{n+1} الذي تَعتمد قيمته عند الزمن القادم n+1 على طراز خطي مستقل عن الزمن (مستقل ذاتياً) من قيمته الحالية a_n.

إن حَلّ المعادلة الفرقية (5-1) عبارة عن مسار Trajectory (أَو مدار Orbit) للمتتالية $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$، والذي يحقق هذا القانون للحركة (المُمثّل بالمعادلة الفرقية (5-1)) عند أي نقطة زمنية. وهذا الحل يتعلق بإيجاد قيمة المتغير عند الزمن n، a_n، بدلالة قيمته الابتدائية a_0 فضلا عن قيمة المعلمتين c_0 و c_1.

يمكن بيسر حل المعادلة (5-1) بالطريقة المباشرة وعلى النحو الآتي. نقوم بالتعويض المتتالي عن قيم الدليل n: فعندما n=1، فإن:

$$a_1 = c_0 + c_1 a_0$$

وعندما n=2، فإن:

$$\begin{aligned} a_2 &= c_0 + c_1 a_1 \\ &= c_0 + c_1 (c_0 + c_1 a_0) \\ &= c_0 (1 + c_1) + c_1^2 a_0. \end{aligned}$$

وبتكرار هذه العملية على باقي قيم n=3,4,...، نجد أن:

$$a_n = c_0(1 + c_1 + c_1^2 + ... + c_1^{n-1}) + c_1^n a_0.$$

وكما هو واضح فإن الحد الأول من المقدار الأخير هو متوالية هندسية منتهية أساسها c_1، ومجموعها $(1-c_1^n)/(1-c_1)$، شريطة أن تكون $c_1 \neq 1$. أما إذا كانت $c_1 = 1$، فإن الحد الأول من المقدار السابق سيكون nc_0. وبذلك يكون الحل النهائي للمعادلة (5−1) هو:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{c_0(1-c_1^n)}{1-c_1} + a_0 c_1^n; \ c_1 \neq 1 \\ nc_0 + a_0; \ c_1 = 1 \end{cases} \qquad (2a\text{ -}5)$$

كما يمكن كتابة المعادلة الأخيرة بالصيغة المكافئة الآتية:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{c_0}{1-c_1} + [a_0 - \dfrac{c_0}{1-c_1}]c_1^n; \ c_1 \neq 1 \\ nc_0 + a_0; \ c_1 = 1 \end{cases} \qquad (2b\text{ -}5)$$

لذا، لمّا كانت القيمة ألابتدائية a_0 مِن المتغيّر مُعطاة، فإن كامل مسار المتغيّر يُحدّد بطريقة وحيدة.

ملاحظة:

في العديد من التطبيقات الواقعية يكون من المفيد معرفة قيمة n التي تقابل قيمة معطاة من a_n. ففي المعادلة الفرقية (5−1) إذا أعطينا قيمة a_n، فيمكن بيسر إيجاد ة قيمة n المقابلة على النحو الآتي:

أ− إذا كانت $c_1 \neq 1$ فمن الشطر الأول من المعادلة (5−2a) نجد أن:

$$a_n = \frac{c_0(1-c_1^n)}{1-c_1} + c_1^n a_0.$$

وبعد تبسيط المقدار الأخير وذلك بجعل المقدار الذي يتضمن المجهول n ، a_n، في الطرف الأيسر، وباقي المعلمات في الطرف الأيمن، نجد أن:

$$c_1^n = \frac{c_0 + a_n(c_1 - 1)}{c_0 + a_0(c_1 - 1)}.$$

وبأخذ ln طرفي المعادلة الأخيرة، وبعد التبسيط نجد أن:

$$n = \frac{\ln[\dfrac{c_0 + a_n(c_1 - 1)}{c_0 + a_0(c_1 - 1)}]}{\ln(c_1)}; \ c_1 \neq 1. \qquad (3a\text{ -}5)$$

وبطبيعة الحال فإن قيمة n الناتجة من المعادلة الأخيرة تقرّب إلى أقرب عدد صحيح.

ب− إذا كانت $c_1 = 1$ فمن الشطر الثاني من المعادلة (5−2a) نجد أن:

$$n = \frac{a_n - a_0}{c_0};\ c_1 = 1. \qquad (3b\text{ -}5)$$

المثال (5–4):

إذا كان النموذج الرياضي للمتتالية $\{a_n\}$ هو:

$$a_{n+1} = 5 + a_n;\ n \in N$$
$$a_0 = 3.$$

أ– جد أول ستة حدود من هذه المتتالية.

ب– جد الحد الخامس عشر والحد المائة من هذه المتتالية.

ت– ما هو الحد في هذه المتتالية والذي قيمته 103؟

الحل:

نلاحظ أولا أن $c_0 = 5$ و $c_1 = 1$.

أ– طالما أن $c_1 = 1$، فمن الشطر الثاني من المعادلة (5–2a) نجد أن:

$$a_n = nc_0 + a_0.$$
$$\therefore a_1 = 5 + 3 = 8,\ a_2 = 2 \times 5 + 3 = 13,\ a_3 = 3 \times 5 + 3 = 18,$$
$$a_4 = 4 \times 5 + 3 = 23,\ a_5 = 5 \times 5 + 3 = 28,\ a_6 = 6 \times 5 + 3 = 33.$$

ب–

$$a_{15} = 15 \times 5 + 3 = 48,\ a_{100} = 100 \times 5 + 3 = 503.$$

ت– من المعادلة (5- 3b) نجد أن:

$$n = \frac{a_n - a_0}{c_0} = \frac{103 - 3}{5} = 20.$$

أي إن الحد العشرون تكون قيمته 103.

المثال (5–5):

إذا كان النموذج الرياضي للمتتالية $\{a_n\}$ هو:

$$a_{n+1} = 1 + 3a_n;\ n \in N$$
$$a_0 = 2.$$

أ– جد أول ستة حدود من هذه المتتالية.

ب– جد الحد الخامس عشر من هذه المتتالية.

ت– ما هو الحد في هذه المتتالية والذي قيمته 147622؟

الحل:

نلاحظ هنا أن $c_0 = 1$ و $c_1 = 3$.

أ– طالما أن $c_1 \neq 1$، فمن الشطر الأول من المعادلة (5–2a) نجد أن:

$$a_n = \frac{c_0(1-c_1^n)}{1-c_1} + a_0 c_1^n .$$

$$\therefore a_1 = \frac{1-3}{1-3} + 2\times 3 = 7,\ a_2 = \frac{1-3^2}{1-3} + 2\times 3^2 = 22,$$

$$a_3 = \frac{1-3^3}{1-3} + 2\times 3^3 = 67,\ a_4 = \frac{1-3^4}{1-3} + 2\times 3^4 = 202,$$

$$a_5 = \frac{1-3^5}{1-3} + 2\times 3^5 = 607,\ a_6 = \frac{1-3^6}{1-3} + 2\times 3^6 = 1822.$$

ب-

$$a_{15} = \frac{1-3^{15}}{1-3} + 2\times 3^{15} = 35872267.$$

ت- من المعادلة (5- 3a) نجد أن:

$$n = \frac{\ln[\frac{c_0 + a_n(c_1-1)}{c_0 + a_0(c_1-1)}]}{\ln(c_1)} = \frac{\ln[\frac{1+(3-1)147622}{1+2(3-1)}]}{\ln(3)} = \frac{\ln(59049)}{\ln(3)} = 10.$$

أي إن الحد العاشر تكون قيمته 147622.

5-8 دراسة حالات في النمذجة الحتمية للتغيير

Case Studies of Deterministic Modeling of Change:

يتناول هذا المبحث عدد التطبيقات للنمذجة الحتمية للتغيير، وسوف توضح هذه التطبيقات بشيئ من التفصيل من جانبيها النظري والعملي.

5-8-1 قانون نيوتن للتَبريد

Newton's Law of Cooling:

من تطبيقات نمذجة التغيير، نمذجة التغيير في درجة حرارة شيئ يوضع في بيئة ذات حرارة ثابتة، مثل وضع جسم دافئ داخل مجمدة، أو إدخال قطعة من الآيس كريم الباردة إلى داخل غرفة. فلو كان T_0 يرمز إلى درجة الحرارة الابتدائية للجسم، و C يرمز إلى درجة الحرارة الثابتة في البيئة المحيطة بالشيء، و T_n يرمز إلى درجة حرارة الشيء بعد n من الوحدات الزمنية، فإن مقدار التغيير في درجة حرارة الشيء في الوحدة الزمنية الواحدة يحسب بالمعادلة الفرقية الآتية:

$$\Delta T_n = T_{n+1} - T_n = k(T_n - C);\ n \in N, \qquad (4\text{-}5)$$

إذ إن k هو مقدار ثابت يعتمد على طبيعة الشيئ. وتُعرف المعادلة الفرقية الأخيرة بقانون نيوتن للتبريد. بعبارة أخرى فإن قانون نيوتن للتبريد ينص على أن **الفرق في درجة الحرارة** ΔT_n