المحاضرة السادسة

المبرهنة الاتية (طريقة خوارزمية القسمة) تبين كيفية ايجاد القاسم المشترك الاعظم وايجاد m, n ايضاً.

مبرهنـة (12) (خوارزمية اقليدس Euclidean algorithm):

إذا كان a, b عددين صحيحين غير صفريين واستخدمنا خوارزمية القسمة المتتالية الاتية:

$$
\begin{array}{ll}
a = bm_1 + r_1 & ، \quad 0 < r_1 < |b| \\
b = r_1 m_2 + r_2 & ، \quad 0 < r_1 < r_1 \\
r_1 = r_2 m_3 + r_3 & ، \quad 0 < r_2 < r_1 \\
r_2 = r_3 m_4 + r_4 & ، \quad 0 < r_4 < r_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
r_{i-2} = r_{i-1} m_i + r_i & ، \quad 0 < r_i < r_{i-1} \\
r_{i-1} = r_i m_{i+1} + 0 &
\end{array}
$$

فان $r_i = \gcd(a,b)$، كما وانه يمكن استخدام نفس المعادلات ابتداءً من الاخيرة الى الاولى لايجاد $m, n \in Z$ بحيث $r_i = am + bn$.

لاحظ انه لابد من الحصول على **باقٍ يساوي الصفر** بعد عدد منتهٍ من الخطوات.

امثلـة:

1) اوجد القاسم المشترك الاعظم للعددين 252و 90 باستخدام خوارزمية اقليدس، ثم اوجد $m, n \in Z$ بحيث أن d=252m + 90n .

a = bm + r

252= 2(90) + 72 ⇒ 72 = 252 – 2(90)

90= 1(72) + 18 ⇒ 18=90- 1(72)

72= 4(18) + 0

اذاً القاسم المشترك الاعظم هو **d=18** .

من الخطوات قبل الاخيرة اعلاه وبالمرور على خطوات الخوارزمية بصورة عكسية لإيجاد قيم m, n، نحصل على:

18= 90 – 72

= 90 -252+ 2(90)

= -252 + 3(90).

إذا **m= -1** و **n= 3**.

----

2) أوجد d= (2746, 335)، ثم عبر عنه بالشكل d=2746m + 335n، باستخدام خوارزمية اقليدس ثم اوجد $m, n \in Z$.

a = bm + r

2746 = 8(335) + 66 ⇒ 66= 2746- 8(335)

335= 5(66) + 5 ⇒ 5= 335-5(66)

66 = 13(5) +1 ⇒ 1= 66-13(5)

5= 5(1) + 0.

اذاً القاسم المشترك الاعظم هو **d=1**.

من الخطوات قبل الاخيرة اعلاه وبالمرور على خطوات الخوارزمية بصورة عكسية لإيجاد قيم m, n، نحصل على:

1= 66- 13(5)

= 66 – 13[335-5(66)]

$= 66 - 13(335) + 65(66)$

$= 66(66) - 13(335)$

$= 66[2746 - 8(335)] -13(335)$

$= 66(2746) -528(335) - 13(335)$

$= 66(2746) - 541(335).$

اذأ **m=66** و **n= -541**.

ملاحظة:

يمكن حساب القاسم المشترك الأعظم d للعددين a,b وإيجاد $m,n \in Z$ بحيث أن $d = am + bn$ بإستخدام طريقة بلانكنشب (Blankinship). American Mathematical Monthly (1963) وهي :

نفرض أن $a > b > 0$ ، وأن $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ونضيف (بالتعاقب) مضاعفات أحد الصفوف إلى الصف الآخر "يسمى مثل تلك العمليات –عمليات صفوف أوليه $\alpha r_i + r_j$ " إلى أن نصل إلى مصفوفة بالشكل

$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ d & m & n \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} d & m & n \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$ فيكون $d = (a,b) = am + bn$

امثلـة: أوجد d=(a, b)، ثم اوجد $m, n \in Z$ بحيث أن $d = am + bn$ ، باستخدام طريقة بلانكنشب.

i- a= 39, b= 18

بما أن $A=\begin{pmatrix}39 & 1 & 0\\ 18 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ، وبما أن $39=2(18)+3$ إذاً نضرب الصف الثاني r_2 في (-2) ونجمعه مع الصف الأول r_1 فنجد أن

$$A=\begin{pmatrix}39 & 1 & 0\\ 18 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_2+r_1}\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 18 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

لكن $18=6(3)$. إذاً نضرب الصف الأول في (-6) ونجمعه مع الصف الثاني فنجد أن

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 18 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{-6r_1+r_2}\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 0 & -6 & 13\end{pmatrix}$$

إذاً $d=3=39(1)+18(-2)$.

---

ii- a= 1976, b= 365.

$A=\begin{pmatrix}1976 & 1 & 0\\ 365 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ، $1976=365(5)+151$. إذاً

$A\xrightarrow{-5r_2+r_1}\begin{pmatrix}151 & 1 & -5\\ 365 & 0 & 1\end{pmatrix}$. لكن $365=2(151)+63$ ، إذاً

$$\begin{pmatrix}151 & 1 & -5\\ 365 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}151 & 1 & -5\\ 63 & -2 & 11\end{pmatrix}$$

وحيث أن $151=2(63)+25$ ، إذاً

$$\begin{pmatrix}151 & 1 & -5\\ 63 & -2 & 11\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_2+r_1}\begin{pmatrix}25 & 5 & -27\\ 63 & -2 & 11\end{pmatrix}$$

وبما أن $63=2(25)+13$. إذاً

$$\begin{pmatrix} 25 & 5 & -27 \\ 13 & -12 & 65 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 12 & 17 & -92 \\ 13 & -12 & 65 \end{pmatrix}$$

لكن $13 = 12(1)+1$. إذاً

$$\begin{pmatrix} 12 & 17 & -92 \\ 13 & -12 & 65 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1+r_2} \begin{pmatrix} 12 & 17 & -92 \\ 1 & -29 & 157 \end{pmatrix}$$

وحيث أن $12 = 12.1$. إذاً

$$\begin{pmatrix} 12 & 17 & -92 \\ 1 & -29 & 157 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 0 & 46 & -249 \\ 1 & -29 & 157 \end{pmatrix}$$

وعليه فإن $d = (1976, 365) = 1 = 1976(-29) + 365(157)$.

تعريف:

يقال عن عددين صحيحين غير صفريين انهما **اوليان نسبياً** (relatively prime)، إذا كان **قاسمهما المشترك الاعظم يساوي واحد.**

امثلـة:

(أ) $5,2$ أوليان نسبياً ، لأن $(2,5) = 1$.

(ب) $6,11$ أوليان نسبياً ، لأن $(11,6) = 1$.

(ج) $8,15$ أوليان نسبياً ، لأن $(8,15) = 1$.

(د) $335,2746$ أوليان نسبياً ، لأن $(335,2746) = 1$

(هـ) 18 و 15 فأنهما ليس اوليين نسبياً، لان 3 = $(18, 15)$

(و) $(256, 112, 72) = (256, ((112, 72)) = (256, 8) = 8$

تعريف:

توصف الاعداد $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ بانها اولية تبادلياً اذا كان :

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n = 1$ وتوصف بانها اوليه نسبيا مثنى مثنى

اذا كان : $(a_i , a_j) = 1$ لكل: $1 \le i \neq j \le n$

مثال: الاعداد **35, 21, 15** **أولية تبادلية**، لان:

$(15, 21,35) = (15, (21, 35)) = (15, 7) =1$

ولكنها **ليست اعداد أولية نسبيا مثنى مثنى**، لان:

$(15, 21) = 3; (15, 35) = 5; (21, 35) =7$

مبرهنة (13):
أذا كان $a, b \in Z^*$، فان a, b أوليان نسبياً اذا وفقط اذا وجد $m, n \in Z$، بحيث أن am+bn=1.
البرهان:
$\Leftarrow$ نفرض أن a, b أوليان نسبياً، اذاً (a, b)=1 وعليه يوجد $m, n \in Z$ بحيث أن am+bn=1.
$\Rightarrow$ نفرض وجود $m, n \in Z$ بحيث أن am+bn=1.
نفرض d=(a, b)، إذا $d \setminus a$, $d \setminus b$ اذاً $d \setminus (am + bn)$ حسب مبرهنة (1).
اذاً $d \setminus 1$, لكل $d \in N^*$، اذاً d=1، وعليه فان a, b أوليان نسبياً.

نتيجة (2): (أ) اذا كان $a, b \in Z$، d=(a, b)، فان $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.
(ب) اذا كان $a, b, c \in Z$، وكان $b \setminus a$، $c \setminus a$ و (b, c)=1، فان $bc \setminus a$.
البرهان:
(أ) بما أن d=(a, b)، اذاً يوجد $m, n \in Z$ بحيث أن $d = (am + bn)$، وعليه فأن
$\frac{a}{d}m + \frac{b}{d}n = 1$، وبالتالي $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.
(ب)بما ان $b \setminus a$، $c \setminus a$. اذاً يوجد $r, s \in Z$ بحيث أن a=br=cs. ولكن (b, c)=1.
اذاً يوجد $m, n \in Z$ بحيث أن bm+cn=1 وحسب المبرهنة (10)، وعليه فان
a=abm+can=bcsm+bcrn=bc(sm+rn)
وبالتالي فان $bc \setminus a$.

H. W.
1- جد القاسم المشترك الاعظم باستخدام الخوارزمية للعددين 165, 33، ثم حدد قيم m, n ∈Z.
2- جد القاسم المشترك الاعظم باستخدام بلانكنشب، ثم اكتبها بالصيغة d=am + bn، للعددين 151و 39 .
3- أوجد d=(3054 ,12378) ، باستخدام خوارزمية اقليدس ثم اوجد m, n ∈Z.
4- هل العددان 15, 8 اوليان نسبياً؟
1- اوجد d=(a, b)، ثم جد $m, n \in Z$ بحيث أن d = am + bn لما يلي:
(أ) a=288, b= 51.
(ب) a=1292, b=884.
(ت) a=8633, b=7209.

a=7469, b=2387