الفصل الثاني عشر

نمذجة عدد السكان

Modeling[(1)]Population

مقدمة

يتناول هذا الباب جانبا أساسيا آخر من جوانب النمذجة الرياضية، هو النمذجة باستخدام المعادلات التفاضلية. وتُطرح العديد من التطبيقات التقليدية تتضمن مجالات مختلفة. وفي هذا الفصل تُستهل هذه التطبيقات بمسألة حيوية هي مسألة نمذجة عدد السكان، وسنطلق عليها اختصارا (نمذجة السكان). إن نمذجة السكان تهدف إلى دراسة النمو أو الاضمحلال في أعداد الكائنات الحية، من الإنسان والحيوان، في المجتمعات التي تعيش فيها. وهناك العديد من الأدوات الرياضية الشائعة بهذا الخصوص، إلا أننا سنركز انتباهنا في هذا الفصل على استخدام المعادلات التفاضلية التي تعد من الأدوات القوية في هذا المجال. لقد عرضنا في الفصل الثاني آلية مراحل بناء النماذج الرياضية. وسنقوم في هذا الفصل بإيضاح تلك الآلية مُفصلا من خلال نماذج السكان في المجتمعات البشرية. وقد خُصص المبحث الأخير لنمذجة سكان العراق وفق البيانات الرسمية.

المعادلات التفاضلية

Differential Equations

المعادلة التفاضلية هي معادلة رياضية لدالة مجهولة مؤلفة من متغير واحد أَو أكثر، وهذه الدالة تربط بين قِيم الدالة نفسها ومشتقاتها لمرتبات مختلفة. تُعد المعادلات التفاضلية محورا أساسيا في الرياضيات البحتة والرياضيات التطبيقية، كما أنها تَلعب دورا بارزا في المجالات العلمية والتقنية والاقتصادية ومجالات أخرى متعددة. وتبرز أهمية المعادلات التفاضلية بشكل خاص حينما يكون هناك علاقة حتمية تَتضمّن متغيرات حتمية مستمرة، تُنمذج بهذه الدوال، وان نِسب التغيير في هذه المتغيرات في الفضاء و/ أَو الزمن (المُعبّر عنها كمُشتقات) تكون معلومة أَو مفروضة. فمثلا عند نمذجة حركة الجسم المتحرك الموصوف بموقعِه وسرعتِه بوصفها دالة بدلالة الزمن، فإن قوانين نيوتن تقود إلى نموذج رياضي بشكل معادلة تفاضلية، يُعرف بمعادلة الحركة Equation of Motion، ويربط بين موقع الجسم وسرعته وتعجيله ومختلف القوى المؤثرة فيه. إن نظرية الأنظمة الحركية تؤكد على التحليل النوعي للأنظمة الموصوفة بمعادلات تفاضلية. كما أن هناك العديد من الطرائق العددية لإعطاء الحلول العددية للمعادلات التفاضلية بدقة مقبولة.

(*) إن مصطلح "Population" يُترجم في معاجم اللغة إلى "سكان" أو "عدد سكان". أما في علم الإحصاء فيُترجم إلى "مجتمع" ويُعنى به المجموعة الكلية من الأفراد ذات العلاقة. وفي هذا الكتاب سوف نتعامل مع كلا المعنيين.

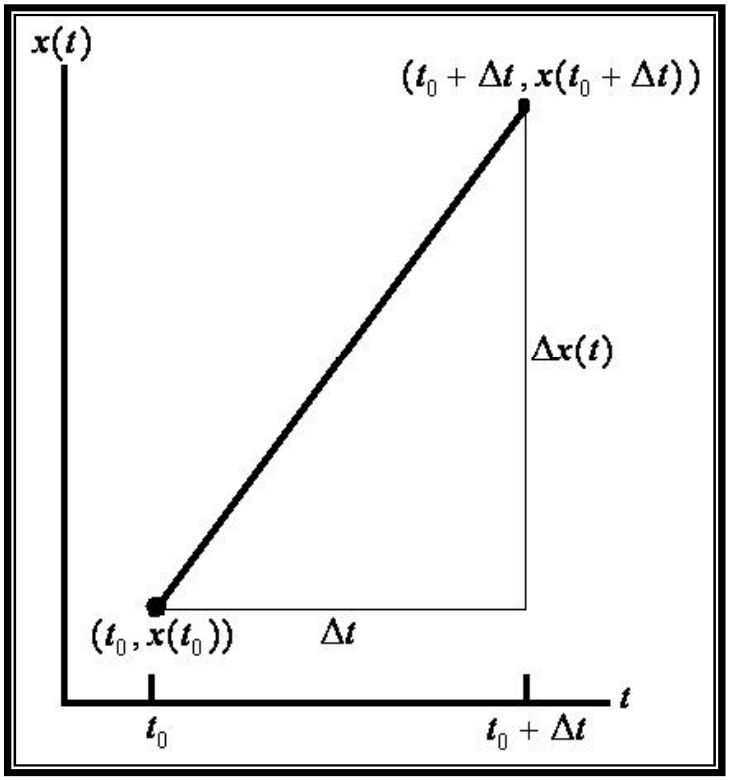
إذا كان x(t) متغيراً يعتمد على الدليل (الزمن) t، فإن التغيير في قيم هذا المتغير خلال الفترة Δt، يرمز له $\Delta x(t)$، ويعرّف بأنه الفرق بين قيمته عند الزمنين t و $t+\Delta t$. أي إن:

$$\Delta x(t) = x(t+\Delta t) - x(t).$$

لنفرض الآن أن ثابت التناسب k يُعبّر عنه بوصفه نسبة مئوية لكل وحدة زمنية. لذا فإن افتراض التناسب يؤول إلى المعادلة الآتية:

$$\Delta x(t) = x(t+\Delta t) - x(t) = kx(t)\Delta t.$$

إن المعادلة الأخيرة معادلةٌ فرقية يمكن استخدامها عندما نتعامل مع نقاط زمنية متقطعة. والشكل الآتي يوضح عناصر المعادلة الأخيرة.



الشكل (1) إيضاح للمعادلة الفرقية (12-1).

وكما هو واضح من الشكل السابق فإن المسافة الأفقية بين النقطتين $(t_0, x(t_0))$ و $(t_0 + \Delta t, x(t_0 + \Delta t))$ هي Δt، وهي توضح مقدار التغيير في قيم الدليل (الزمن) t. أما المسافة العمودية بين هاتين النقطتين فهي $\Delta x(t)$، وهي توضح مقدار التغيير في قيم المتغير المعتمد $x(t)$.

ولو فرضنا الآن أن الدليل t يتغير على نحو مستمر. فبقسمة المعادلة الأخيرة على Δt ينتج:

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = kx(t).$$

ويمكن تفسير المقدار $\Delta x(t)/\Delta t$ فيزياويا بأنه معدل نسبة التغيير في قيم المتغير المعتمد $x(t)$ خلال الفترة الزمنية التي أمدها Δt. أما هندسيا فيُفسّر المقدار $\Delta x(t)/\Delta t$ بأنه ميل

Slope قطعة المستقيم الموصلة بين النقطتين $(t_0, x(t_0))$ و $(t_0 + \Delta t, x(t_0 + \Delta t))$. ولو فرضنا الآن أن Δt تقترب من الصفر، فحسب تعريف المشتقة Derivative فإن المعادلة الأخيرة تؤول إلى ما يأتي:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$
$$= \frac{dx(t)}{dt} = kx(t),$$

إذ إن المشتقة $dx(t)/dt$ تُمثّل النسبة الآنية للتغيير Instantaneous Rate of Change في قيم المتغير المعتمد $x(t)$. وتجدر الإشارة إلى أن المشتقة $dx(t)/dt$ تُستخدم في موضعين:

1- لكي تُمثّل النسبة الآنية للتغيير في المسائل المتعلقة بمتغيرات مستمرة.

2- لتقريب معدل نسبة التغيير في المسائل المتعلقة بمتغيرات متقطعة.

إن المعادلة التفاضلية الاعتيادية Ordinary Differential Equation عبارة عن معادلة تفاضلية يكون فيها المتغير المعتمد (الدالة المجهولة) دالة بدلالة متغير مستقل وحيد. إن المتغير المعتمد قد يكون أحادي القيمة، وقد يكون متّجهاً أو مصفوفة. لذا قد تكون لدينا معادلة تفاضلية واحدة أو نظام من المعادلات التفاضلية System of Differential Equations عند نمذجة مسألة معينة. من ناحية ثانية، فإن المعادلات التفاضلية تُصنّف حسب مَرتبة Order أعلى مشتقة للمتغير المستقل فيها بالنسبة إلى المتغير المُعتمد. إنّ الحالاتَ الأكثر أهميةً في التطبيقات هي المعادلات التفاضلية من المَرتبتين الأولى والثانية.

تكون المعادلة التفاضلية خطيّة Linear إذا كان أس المتغير المعتمد ومشتقاته يساوي 1 (حاصل الضرب غير مسموح)، وبخلاف ذلك تكون المعادلة التفاضلية غير خطية Nonlinear. إنّ الميزة المهمة للمعادلات الخطيّة هي سهولة التعامل معها وإمكانية إيجاد حلولها التحليلية. في الطرف المُقابل فان المعادلات التفاضلية اللاخطية يُمكِن أن تُقدم وصفا دقيقا للعديد من الخصائص الطبيعية التي تعجز المعادلات التفاضلية الخطية عن وصفها، مثل خاصية الهَباء (الفوضى) Chaos، التي سوف ندرسها لاحقا.

12- 3 نماذج السكان

Population Models

يطلق مصطلح "**السكان**" على جميع الكائنات الحية التي تَعُود إلى النوع نفسه وتَعيش في منطقة جغرافية معينة. وفي عِلْمِ الاجتماع Sociology، فإن مصطلح "السكان" يُشير إلى مجموعة الكائنات البشرية التي تعيش في دولة أو منطقة معينة. إن علم السكان Demography علم خاص يهتم بدراسة الجوانب الإحصائية للسكان من بني البشر.

إن نمذجة السكان تطبيقٌ للنمذجة الرياضية لدراسة حركة (ديناميكية) الكائنات الحية في النمو والاضمحلال. وتعد مسألة نمذجة السكان من المسائل الأساسية التي يهتم بها علم البيئة Ecology.إن نمذجة السكان تتضمن دراسة التغيرات في حجوم السكان بوصفها نتيجة للتفاعلات بين الأفراد في البيئة الطبيعية مَع أفراد نوعِهم الخاص، وكذلك الكائنات الحية من الأنواع الأخرى.

إن معرفة أعداد السكان تعد من المسائل المهمة التي تهتم بها مختلف دول العالم. وغالبا ما يتم إجراء تعداد للسكان كل عشر سنوات لمعرفة الأعداد الحقيقية للسكان. وتكمن أهمية معرفة أعداد السكان في ارتباطها الوثيق بشتى جوانب الحياة في المجتمعات البشرية، وعلاقتها القوية بالخطط التنموية وتوفير الخدمات المختلفة الحالية والمستقبلية، فضلاً عن جوانب أخرى متعددة.

لقد كانت البداية الحقيقية لنمذجة السكان في القرن الثامن عشر في تَطوير التقنيات لنمذجة التغيّر في أعداد الأفراد لفهم النمو والتقلص في حجوم السكان. ويعد الباحث البريطاني توماس مالثوس (1766– 1834) Thomas Robert Malthus واحدا من الرواد في هذا المضمار، إذ لاحظ– عندما كان يتأمّل مصير البشرية– بأن أعداد السكان من بني البشر تنمو وفق نمط هندسي. ثم صاغَ البلجيكي بيير فرانسوا فيرهولست (1804–1849) Pierre François Verhulst في العام 1838 النموذج اللوجستي Logistic Model الذي يعد أحد أكثر نماذج السكان شهرة بوصفه نموذجاً رياضياً كفءاً لنمو السكان . إن الشكل العام للنموذج اللوجستي هو على شكل منحنى قولون ملتوٍ Sigmoid ويَصِف نمو السكان كونه نموا أسيا مقيدا بالضغوط البيئية.

وفي القرن العشرين، جذبت نمذجة السكان اهتمامات علماء الأحياء نتيجة للضغوط المتزايدة بسبب تزايد سكان العالم من جهة، ومحدودية مصادر المعيشة من ماء وغذاء من جهة اخرى. وفي العام 1921 استضاف عالم الأحياء رايموند بير Raymond Pear العالم الفيزياوي والرياضي الأمريكي لوتكا (1880– 1949) Alfred James Lotka كي يساعده في مختبرِه. وقد طوّر لوتكا زوجاً من المعادلات التفاضلية لنمذجة العلاقة البيئية بين الفريسة والمفترس، انظر الفصل الثامن عشر. ثم ضاهى الرياضي والفيزياوي الإيطالي فيتو فولتررا (1860 –1940) Vito Volterra العلاقة بين فصيلتين مستقلتين من الحيوانات اعتمادا على نموذج لوتكا. ثم اقترح لوتكا وفولتررا نموذجهما المعروف بنموذج لوتكا – فولتررا للمنافسة Lotka-Volterra model for competition والذي يُطبِّق النموذج اللوجستي على فصيلتين من الحيوانات بينهما منافسة وافتراس وتفاعل. وفي العام 1939 حدثت مساهمات أخرى في مجال نمذجة السكان من قبل باتريك ليزلي Patrick Leslie، وقد عدّت تلك المساهمات بداية العلم المهم والذي يعرف حاليا بالرياضيات الحياتية Biomathematics، وهذا العلم أصبح أساسا لما يعرف الآن بالمعلوماتية الحياتية Bioinformatics.

عدد سكان العراق

يعدُّ العراق– أو بلاد ما بين النهرين– مهد الحضارات، كما يعدُّ من أقدم المجتمعات البشرية. وقد تباين عدد سكان العراق بمرور الزمن نتيجة للظروف البيئية والاقتصادية والسياسية. وتشير المعلومات المتاحة إلى أن عدد سكان العراق في العام 1867م كان قرابة المليون وربع المليون. وفي العام 1920م بلغ مجموع السكان مليونان و 849 ألفاً و 282 نسمة. وبعد ذلك توالت التعدادات السكانية، كما سوف نوضح ذلك لاحقا.

الشكل (2) جمهورية العراق

إن معرفة عدد السكان تتم من خلال ما يُعرف بتعداد السكان. ويُعرّف تعداد السكان بأنه عملية العد الشاملة لأفراد المجتمع الموجودين على قيد الحياة داخل حدود ذلك البلد في لحظة وتاريخ معين. ويُجرى عادة التعداد السكاني في دول العالم كل عشر سنوات، حيث تُحشد له كافة الإمكانيات والتقنيات لغرض إجراء دراسة شاملة حول التركيبة السكانية والاجتماعية والاقتصادية للبلد، من أجل تخطيط أفضل للسكان وفهم أوسع لاحتياجاته من مرافق خدمية ومؤسسات صحية وبنايات مدارس ومساكن ومستشفيات...الخ، وما تحتاجه هذه المرافق والمؤسسات من كوادر بمختلف أنواعها واحتياجاتها لغرض تهيئتها في المستقبل ووضع خطط التنمية الاقتصادية. أما تاريخ التعدادات السكانية في العراق فيمكن القول بأن العراق شهد 8 تعدادات للسكان منذ بداية نشوء الدولة العراقية في العام 1921، إذ تم في العام 1927 تسجيل الأفراد المقيمين في العراق وعدّ ذلك أول تعداد للسكان. وفي العام 1934 تم إجراء التعداد الثاني، وفي العام 1947 أجري الثالث، والذي يعد أول تعداد دقيق للسكان. وأجري الرابع في العام 1957، وفي عام 1965 تم

إجراء تعداد سكاني، ولكن لم يعول علي لأسباب سياسية. ثم تم إجراء آخر جديد في العام 1977، وفي العام 1987 تم إجراء تعداد لم يكن دقيقا بسبب الحرب العراقية الإيرانية. وآخر تعداد تم في العام 1997، وعدّ ناقصا بسبب عدم شموله محافظات اربيل والسليمانية ودهوك. فكان عدد السكان آنذاك 19 مليون نسمة، وقد أضيف إليه تقديرات وزارة التخطيط للمحافظات غير المشمولة، وكانت بحدود ثلاثة ملايين، فأصبح عدد السكان الرسمي حوالي 22 مليون نسمة

والجدول الآتي يبين عدد سكان العراق حسب تعدادات السكان الرسمية، وسوف تُعتمد نتائج هذه التعدادات من اجل نمذجة عدد سكان العراق في المبحث الأخير من هذا الفصل.

الجدول (1) عدد سكان العراق حسب تعدادات السكان الرسمية

السنة	عدد السكان (مليون نسمة)
1947	4.564
1957	6.34
1967(*)	9.255
1977	12.17
1987	16.34
1997	22.02

(*) لا يوجد تعداد سكان في هذا العام، والقيمة المذكورة تقديرية

مراحل بناء نموذج رياضي لعدد السكان

يتناول هذا المبحث مسألة بناء نموذج رياضي لعدد السكان في بلد ما أو منطقة معينة وذلك باستخدام المعادلات التفاضلية. وسوف يُعرض الموضوع بشكل نموذجي ينسجم تماما مع ما ذكر في الفصل الثاني عند عرض آلية مراحل بناء النماذج الرياضية.

المرحلة الأولى

الفرضيات: إن الفرضية التي افترضها توماس مالثوس هي أنه خلال فترات زمنية صغيرة فإن أعداد الولادات والوفيات تتناسب مع كل من حجم المجتمع وطول الفترة الزمنية.

المرحلة الثانية

الصياغة الرياضية: لو فرضنا أن المتغير N(t) يمثل عدد السكان في البلد قيد الدراسة في الزمن t، و B(t) يمثل عدد الولادات في ذلك البلد في الزمن t، والمتغير D(t) يمثل عدد الوفيات في ذلك البلد في الزمن t. ولو كانت δt تمثل فترة زمنية صغيرة (مثلا ساعة زمنية)، فان الترجمة الرياضية للفرضية السابقة هي:

$$B(t)\alpha N(t)\delta t,$$
$$D(t)\alpha N(t)\delta t,$$

إذ إن α ترمز إلى التناسب (لاحظ أن " و "and دائما تُترجم رياضيا إلى ضرب، في حين أن "أو "or تُترجم إلى جمع). ويمكن بيسر تحويل التناسب إلى مساواة وذلك بضرب الطرف الأيسر من التناسب بكمية ثابتة؛ لذا نستنتج بان:

$$B(t) = aN(t)\delta t,$$
$$D(t) = bN(t)\delta t,$$

إذ إن a و b هما مقداران ثابتان.

إن التغيّر في عدد السكان في فترة زمنية صغيرة δt ، $\delta N(t)$ ، يمثل الفرق بين أعداد الولادات وأعداد الوفيات في تلك الفترة:

$$\begin{aligned}\delta N(t) &= B(t) - D(t)\\ &= aN(t)\delta t - bN(t)\delta t\\ &= cN(t)\delta t,\end{aligned}$$

إذ إن c=a-b هي كمية ثابتة؛ لذا نجد أن:

$$\frac{\delta N(t)}{\delta t} = cN(t).$$

وبأخذ غاية الطرفين عندما تقترب δt من الصفر:

$$\lim_{\delta t\to 0} \frac{\delta N(t)}{\delta t} = \frac{dN(t)}{dt} = cN(t).$$

فيكون النموذج الرياضي المقترح لعدد السكان، في ضوء الفرضية التي افترضها توماس مالثوس هو:

$$\frac{dN(t)}{dt} = cN(t), \qquad (1)$$

إذ إن c هي كمية ثابتة.

المرحلة الثالثة

الحل الرياضي: إن النموذج الذي تم الحصول عليه عبارة عن معادلة تفاضلية من المَرتبة الأولى. ويمكن بيسر حل هذه المعادلة وكما يأتي:

$$\because \frac{dN(t)}{dt} = cN(t),$$
$$\therefore \frac{dN(t)}{N(t)} = cdt$$

وبأخذ تكامل الطرفين، نجد أن:

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = c\int dt$$

$$\therefore \int \frac{dN(t)}{N(t)} = ct + k$$

إذ إن k ثابت التكامل.

$$\therefore \ln[N(t)] = ct + k$$

ولإيجاد ثابت التكامل، نفرض أن عدد السكان في الزمن t=0 هو N(0)؛ لذا نجد أن:

$$k = \ln[N(0)].$$

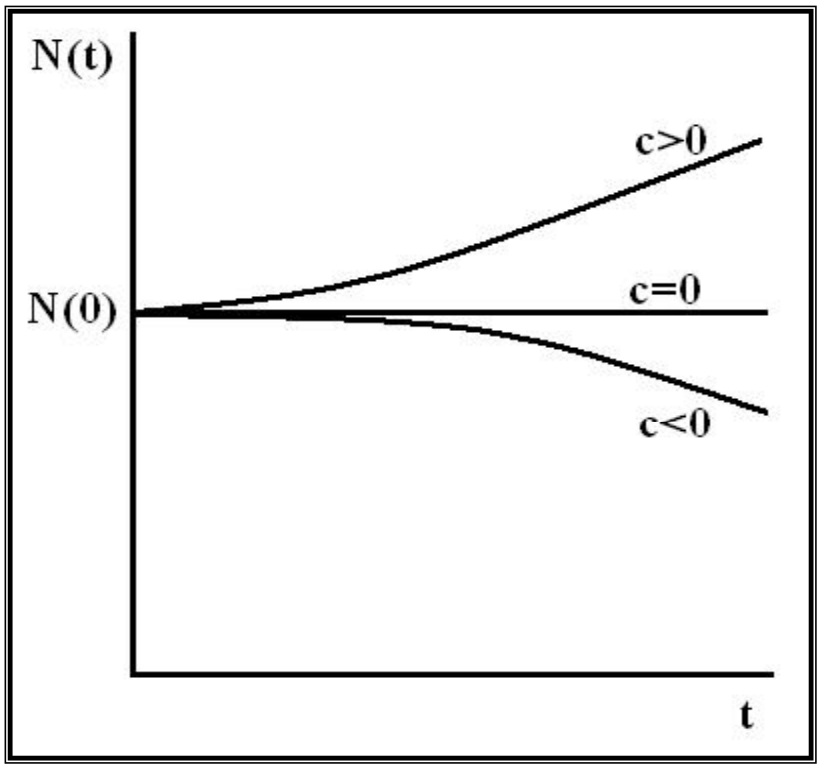
فيكون الحل لنموذج توماس مالثوس هو:

$$N(t) = N(0)e^{ct}. \qquad (2)$$

المرحلة الرابعة

تفسير الحل: كما ذكرنا في الفصل الثاني فان تفسير الحل يتضمن عددا من التقنيات الرياضية. وفي هذا التطبيق، وطالما أن النموذج الذي نتعامل معه نموذج حتمي (ليس تصادفيا)، فإن تفسير الحل سيقتصر على جانبين، هما:

أ- **رسم الحل:** الشكل الآتي يوضح حل نموذج توماس مالثوس.



الشكل (3) حل نموذج توماس مالثوس.

وكما هو واضح من الشكل السابق فإن حل نموذج توماس مالثوس يعطي وصفا معقولا للتغيّر في حجم السكان: فإذا كان c=0، فإن حجم المجتمع سوف يبقى كما هو في مكانه؛ لأن نسبة الولادات سوف تساوي نسبة الوفيات. وإذا كان c<0، فإن حجم المجتمع سوف يتناقص لأن نسبة الولادات سوف تكون أقل من نسبة الوفيات. أما إذا كان c>0، فان حجم المجتمع سوف يتزايد باضطراد لأن نسبة الولادات سوف تكون أكبر من نسبة الوفيات.

– **اختبار كفاءة النموذج في التنبؤ:** إن اختبار كفاءة النموذج في التنبؤ يتطلب بيانات واقعية. إن أشهر بيانات واقعية لأعداد السكان تلك التي للولايات المتحدة الأمريكية، هذه البيانات عبارة عن مجموعة متكاملة تضم أعداد السكان الواقعية المسجلة حسب تعدادات السكان في الولايات المتحدة الأمريكية للمدة من 1790 ولغاية سنة 2010 بواقع إحصاء تعداد سكان لكل 10 سنوات، انظر الملحق A.

وسنطلق على السنة التي نبدأ بها نمذجة السكان تسمية **سنة الأساس**. فلو عددنا سنة الأساس سنة 1790 سنةَ أساس، فإن الدليل المقابل لهذه السنة هو t=0. وطالما أن تعداد السكان يتم كل 10 سنوات، فإن t=1 تكافئ السنة 1800، و t=2 تكافئ السنة 1810، و t=3 تكافئ السنة 1820،....، و t=22 تكافئ السنة 2010. أي إن الدليل المقابل t يحسب من العلاقة الآتية:

$$t = \frac{Year - 1790}{10}.$$

إن نموذج توماس مالثوس يعتمد على كمية ثابتة معلومة، هي N(0)، وكمية ثابتة مجهولة هي c. ومن البيانات نجد أن عدد السكان (مليون نسمة) في سنة الأساس هو N(0)=3.9، وفي السنة 1800 هو N(1)=5.3. لذا لو عوضنا في النموذج عن t=1 ، نجد أن:

$$N(1) = N(0)e^{c}$$

فتكون

$$c = \ln[\frac{N(1)}{N(0)}]$$
$$= \ln(\frac{5.308}{3.929}) = 0.3.$$

أي إن نسبة النمو الأسي في عدد السكان $0.3 \times 100\% = 30\%$ خلال 10 سنوات. وبذلك يكون نموذج توماس مالثوس الملاءَم لسكان الولايات المتحدة الأمريكية هو:

$$N(t) = N(0)e^{0.3t};\ N(0) = 3.9.$$

ويمكن الآن وبيسر استخدام النموذج الأخير للتنبؤ بأعداد السكان في الولايات المتحدة الأميركية للسنوات اللاحقة.

البرنامج الآتي، واسمه **MultPred**، يقوم بالتنبؤ بأعداد السكان في الولايات المتحدة الأميركية للسنوات اللاحقة، وكذلك حساب الخطأ المئوي في التنبؤ.

```
% Malthusian Model for population growth
clear
clc
N=[3.929 5.308 7.24 9.638 12.866 17.069 23.192 31.443 38.558
50.156 62.948 75.995 91.972 105.711 122.755 131.669 150.697
179.323 203.212 226.505 248.710  281.416 308.746];
c=log(N(2)/N(1))
m=length(N);
year(1:2)=[1790 1800];
Npred(1:2)=N(1:2);
for t=3:m
   year(t)=year(1)+10*(t-1);
   Npred(t)=N(1)*exp(c*(t-1));
end
AE=abs(N-Npred);
RE=AE./N;
PE=RE*100;
disp('    Year          t          N(t)       Npredicted(t)   PE')
format bank
disp([  year' [0:m-1]' N'  Npred'   PE'])
MSE=sum(AE.^2)/(m-2)
plot(year,N,'O',year,N,year,Npred,'s',year,Npred)
title('The Malthusian Model')
xlabel('Year t')
ylabel('Population  N(t)')
grid
```

ونتائج البرنامج هي:

c =

0.30

Year	t	N(t)	Npredicted(t)	PE
1790.00	0	3.93	3.93	0
1800.00	1.00	5.31	5.31	0
1810.00	2.00	7.24	7.17	0.95
1820.00	3.00	9.64	9.69	0.52
1830.00	4.00	12.87	13.09	1.73
1840.00	5.00	17.07	17.68	3.59
1850.00	6.00	23.19	23.89	3.00
1860.00	7.00	31.44	32.27	2.64
1870.00	8.00	38.56	43.60	13.07
1880.00	9.00	50.16	58.90	17.44
1890.00	10.00	62.95	79.57	26.41
1900.00	11.00	76.00	107.50	41.46
1910.00	12.00	91.97	145.23	57.91
1920.00	13.00	105.71	196.21	85.61
1930.00	14.00	122.76	265.07	115.94
1940.00	15.00	131.67	358.11	171.98
1950.00	16.00	150.70	483.80	221.04
1960.00	17.00	179.32	653.60	264.48
1970.00	18.00	203.21	883.00	334.52
1980.00	19.00	226.51	1192.92	426.66
1990.00	20.00	248.71	1611.61	547.99
2000.00	21.00	281.42	2177.25	673.68
2010.00	22.00	308.75	2941.42	852.70

MSE =

676122.48