المسافة في البيانات (The Distance in Graphs):

لنفرض أن G بيان متصل ومنته , تعرف **المسافة (distance)** بين أي رأسين u و v في G على أنها الطول لأقصر درب بين u و v , ويرمز للمسافة بين u و v بالرمز $d_G(u,v)$, وللتبسيط يرمز لها بـ $d(u,v)$ في حالة عدم وجود التباس، وإذا لم يكن هناك أي درب بين الرأسين u و v (أي أنهما غير متصلين) فأن المسافة بين u و v غير معرفة ويعبر عنها بكتابة $(d(u,v)=\infty)$، ولتجنب هذه الحالة فقد فرضنا أن كل البيانات التي تتعلق بإيجاد المسافة هي بيانات متصلة , وكما نعتبر أن $(d(u,u)=0)$ لكل u في G، إذا المسافة $d(u,v)$ هي عدد صحيح غير سالب لكل u و v في G.

ومن الواضح أن دالة المسافة d المعرفة على $V(G)$ **تحقق البديهيات المترية (metric axioms)** والتي هي :

1. $d(u,v)>0,\ u\neq v,$
2. $d(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v,$
3. $d(u,v)=d(v,u)\ ,$
4. $d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)\ .$

لكل من الرؤوس u، v و w في G، إذ يطلق على البديهية الرابعة بالمتباينة المثلثية (triangle inequality) .

يعرف **القطر (diameter)** لبيان متصل $G=(V,E)$ بأنه أعظم مسافة بين رؤوس G، إذ يرمز للقطر بالرمز δ أي أن :

$$\delta = \max_{u,v\in V} d(u,v)\ .$$

كما يعرف الدرب بين الرأسين u و v الذي طوله يساوي $(d(u,v)=\delta)$ بأنه درب قطري , من الواضح أن قطر البيان التام K_p هو 1 وقطر العجلة W_p والنجمة S_p والبيان الثنائي التجزئة التام $K_{m.,n}$ هو 2 .

يعرف **الاختلاف المركزي (eccentricity)** لأي رأس وليكن v بأنه أعظم مسافة ممكنة بين الرأس v والرؤوس الأخرى في البيان G، ويرمز للاختلاف المركزي للرأس v بـ R (v) أي أن:

$$R(v)=\max_{u\in V} d(u,v)$$

ومن الواضح أن قطر البيان G هو أعظم اختلاف مركزي ، أي أن:

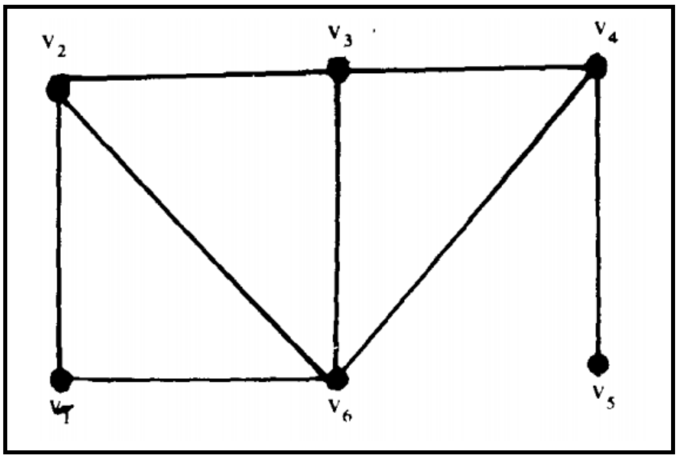
$$\delta=\max_{v\in V} R(v)$$

كما يعرف **نصف القطر (radius)** للبيان G على أنه اصغر اختلاف مركزي, أي أن:

$$r=\min_{v\in V} R(v)$$

وإذا كان u رأسا اختلافه المركزي هو نصف القطر r فأن u رأس مركزي للبيان G، وقد يكون للبيان أكثر من رأس مركزي واحد.

مثال 1: ليكن G بيانا موضح بالشكل 8-1 .



الشكل 8-1

من الواضح أن قطر البيان G هو 3 ويكون بين الرأسين v_1 و v_5 أو(v_2 و v_5).

كما نلاحظ أيضا أن قطر البيان التام هو 1 وقطر كلا من العجلة والنجمة 2.

يطلق على الدرب الذي طوله يساوي قطر البيان بالدرب القطري، نلاحظ من الشكل أعلاه أنه قد يوجد في البيان أكثر من درب قطري.

المسافات بين الرؤوس للبيان G هي :

$d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = 2$, $d(v_1, v_4) = 2$,

$d(v_1, v_5) = 3$, $d(v_1, v_6) = 1$, $d(v_2, v_3) = 1$,

$d(v_2, v_4) = 2$, $d(v_2, v_5) = 3$, $d(v_2, v_6) = 1$,

$d(v_3, v_4) = 1$, $d(v_3, v_5) = 2$, $d(v_3, v_6) = 1$,

$d(v_4, v_5) = 1$, $d(v_4, v_6) = 1$, $d(v_5, v_6) = 2$.

ولأجل تسهيل الحل ، فقد توضع هذه المسافات في جدول على شكل مصفوفة تسمى مصفوفة المسافة ، ثم نضيف عمودا لقيم $R(v)$ ، والذي من خلاله نجد القطر ونصف القطر.

$$r = \min_{v} R(v) = \min\{3,3,2,2,3,2\} = 2 ,$$

$$r = \max_{v} R(v) = \max\{3,3,2,2,3,2\} = 3 .$$

نستنتج أن كلا من الرؤوس v_3, v_4, v_6 هو مركز للبيان المعطى في الشكل8−1.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	R (v)
v_1	0	1	2	2	3	1	3
v_2	1	0	1	2	3	1	3
v_3	2	1	0	1	2	1	2
v_4	2	2	1	0	1	1	2
v_5	3	3	2	1	0	2	3
v_6	1	1	1	1	2	0	2

لابد هنا من ذكر المبرهنة التي تضم العلاقة بين القطر δ ونصف القطر r.

مبرهنة1.8: ليكن $G=(V,E)$ بيانا متصلا قطرة δ ونصف قطرة r , فأن

$$\frac{1}{2}\delta \le r \le \delta .$$

البرهان : لما كان :

$$\delta = \max_{u,v\in V} d(u,v) = \max_{u\in V}\{\max_{v\in V} d(u,v)\} ,$$

$$r = \min_{u\in V}\{\max_{v\in V} d(u,v)\} ,$$

فأن

$$r \le \delta \quad . \qquad \ldots(1)$$

ليكن x و y نهايتي درب قطري ، أي أن $\delta = d(x,y)$ ، وليكن v_0 مركزا للبيان G،

عندئذ يكون :

$$r = R(v_0) = \max_{v\in V} d(v_0, v) ,$$

إذا

$$d(v_0, x) \le r \;\; , \;\; d(v_0, y) \le r \; .$$

ولما كان :

$$d(x,y) \le d(x,v_0) + d(y,v_0) \ ,$$

$$\therefore \delta \le r + r \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}\delta \le r \ . \qquad \ldots(2)$$

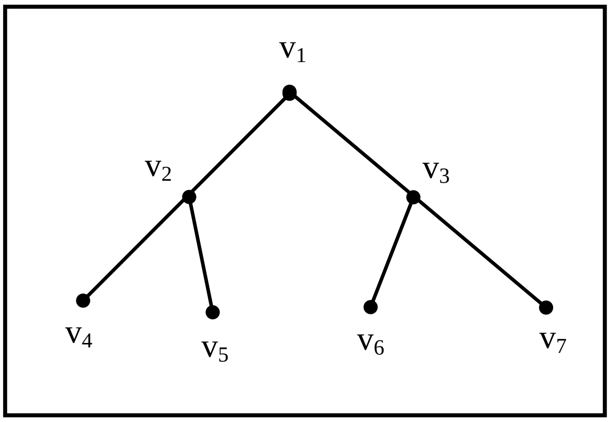
من (1) و (2) نحصل على $\frac{1}{2}\delta \le r \le \delta$.   **انتهى البرهان.**

إذا كان u هو أي رأس في البيان المتصل G , فأن مسافة الرأس u الذي يرمز له بـ $\sigma(u)$ هو مجموع المسافات كافة من u إلى بقية رؤوس G, أي أن:

$$\sigma(u) = \sum_{v \in V(G)} d(u,v) \ .$$

تمارين:

1. جد مصفوفة المسافة لبيان العجلة برتبة 7.
2. جد مصفوفة المسافة للبيان الموضح بالشكل8−2.
3. جد مجموع المسافات للبيان الموضح بالشكل8−2 لكل من الرأسين



الشكل 8−2

4. جد الاختلاف المركزي ونصف القطر والقطر للبيان التام من الرتبة n .
5. حدد الدروب القطرية للبيان الموضح بالشكل8−2.